

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LES GROUPE DE COXETER HYPERBOLIQUES

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

VÉRONIQUE SANGIN-GAGNON

JANVIER 2010

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de maîtrise Robert Bédard, professeur à l'UQÀM qui, par sa gentillesse et sa patience, m'a guidée à chaque étape de la construction du présent mémoire. Sans ses encouragements et sa générosité, je n'aurais pu participer au stage sur Sage à la Simon Fraser University, à Vancouver.

Je voudrais également remercier le professeur de l'UQÀM Christophe Hohlweg pour avoir donné le cours sur les groupes de Coxeter.

Plusieurs personnes m'ont aidée à concevoir un programme générant des représentations de groupes de Coxeter de rang 3 ; je remercie particulièrement Louis-Philippe Camirand-Contant et Arnaud Bergeron.

Finalement, je remercie de tout mon coeur mes parents, Marie-Paule Gagnon et Jean-Pierre Sangin, qui m'ont soutenue financièrement et moralement durant toute ma scolarité.

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement n°8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES SYMBOLES	v
RÉSUMÉ	ix
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES DE COXETER	3
CHAPITRE II	
CLASSIFICATION DES GROUPES DE COXETER DE RANG 3	19
2.1 B définie positive et W est un groupe de Coxeter fini	26
2.2 B dégénérée et W est un groupe de Coxeter affine	29
2.3 B de signature (2,1) et W est un groupe de Coxeter hyperbolique	32
CHAPITRE III	
GROUPES HYPERBOLIQUES DE RANG 3	33
3.1 Cône de Tits et l'ensemble Ω	33
3.2 Représentation de W et plan hyperbolique	36
3.3 Inversion et réflexion	42
3.4 Nombre d'éléments par longueur	49
CHAPITRE IV	
CLASSIFICATION DES GROUPES DE COXETER HYPERBOLIQUES	51
CONCLUSION	81
LISTE DES FIGURES	83
RÉFÉRENCES	85

LISTE DES SYMBOLES

$\langle \lambda, x \rangle$	équivalent à $\lambda(x)$, (p. 14)
A_s	le demi-espace ouvert, (p. 15)
\bar{A}_s	le demi-espace fermé, (p. 15)
B	la matrice de la forme bilinéaire \mathcal{B} , (p. 12)
\mathcal{B}	la forme bilinéaire associée à M , (p. 12)
\mathcal{B}_x	la forme bilinéaire restreinte à H_x , (p. 55)
C	la chambre fondamentale, (p. 15)
D	le domaine fondamental, (p. 15)
\mathcal{D}	le disque de Poincaré, (p. 37)
e	l'élément neutre de W
$\{e_s\}$	une base de V indexée par S , (p. 14)
$\{e_s^*\}$	la base duale de $\{e_s\}$, (p. 14)
H_s	un mur de C , (p. 15)
\mathcal{I}	la bijection $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$, (p. 37)
I_n	la matrice identité de rang n
$Inv_{\mathcal{C}}(z)$	l'inverse de z par rapport à \mathcal{C} , (p. 43)
\mathcal{J}	la bijection $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$, (p. 39)

$l(w)$	la longueur du mot w , (p. 5)
m_{st}	l'ordre de st , (p. 3)
M	la matrice de Coxeter de W , (p. 6)
\mathcal{M}	le modèle de Minkowski, (p. 36)
$O(\mathcal{B})$	le groupe orthogonal pour \mathcal{B} , (p. 26)
O_n	la zéro-matrice de rang n
PV^*	l'espace projectif de V^* , (p. 55)
q	la projection canonique de $V^* \setminus \{0\}$ dans l'espace projectif PV^* , (p. 55)
\mathbb{R}_+	les réels strictement positifs
S	les générateurs de W , (p. 3)
U	le cône de Tits, (p. 15)
V	un espace vectoriel sur \mathbb{R}
V^*	l'espace dual de V
V^\perp	l'espace orthogonal de V , (p. 29)
W	un groupe de Coxeter, (p. 3)
(W, S)	un système de Coxeter, (p. 3)
W_X	le sous-groupe de W engendré par X , (p. 8)
Λ	l'isomorphisme entre V et V^* , (p. 14)
λ_v	l'élément de V^* associé à $v \in V$ par Λ , (p. 14)

- Ω l'ensemble $\{v \in V \mid \mathcal{B}(v, v) < 0\}$, (p. 33 et 52)
- Ω_+ la composante de Ω contenant C , (p. 52)
- Ω_- la composante de Ω ne contenant pas C , (p. 52)

- σ la représentation canonique de W dans V , (p. 12)
- σ^* la représentation canonique duale de W , (p. 15)
- σ_{s_i} défini par $\sigma_{s_i} : e_j \mapsto e_j - \mathcal{B}(e_i, e_j)e_i$, (p. 12)

RÉSUMÉ

Le but principal de ce mémoire est de comprendre la représentation et la classification des groupes de Coxeter hyperboliques. Après avoir jeté les interbases de la théorie de Coxeter, nous exposerons la classification des groupes de Coxeter, puis celle des groupes de Coxeter hyperboliques. Nous porterons une attention particulière au cas des groupes hyperboliques de rang 3. Plus précisément, nous tâcherons de faire le pont entre leur représentation dans \mathbb{R}^3 et celle dans le disque de Poincaré; notamment, nous remarquerons l'équivalence des notions de réflexion et d'inversion.

Les notions de domaine fondamental, de cône de Tits et de forme bilinéaire sont essentielles à la représentation des groupes de Coxeter. La classification des groupes de Coxeter hyperboliques est, pour sa part, basée sur la compacité et sur la classification des groupes de Coxeter finis et affines.

Ce mémoire ayant comme visée la compréhension, et non le développement de la science, nous n'exposons que des résultats connus. Le désir d'illustrer le plus possible constitue peut-être une distinction dans la démarche suivie. Nous avons surtout tenté de représenter un groupe de Coxeter hyperbolique grâce au langage informatique Sage. Les détails du code sont omis, mais dérivent directement des calculs faits aux chapitres 2 et 3.

Mots clefs : groupe, coxeter, hyperbolique, représentation, classification.

INTRODUCTION

La classification et la représentation des groupes de Coxeter hyperboliques sont les principaux thèmes abordés dans ce mémoire.

Les groupes de Coxeter hyperboliques constituent un sujet très vaste pouvant être traité autant d'un point de vue géométrique, algébrique ou combinatoire. Le choix de se concentrer sur le point de vue géométrique nous empêche de traiter plusieurs thèmes majeurs de la théorie des groupes de Coxeter, notamment les systèmes de racines et la combinatoire des mots.

Les fondateurs de ce domaine d'étude étaient Tits et Coxeter. La question d'approfondir la connaissance des groupes de Coxeter hyperboliques est posée depuis ces dernières années. Nous nous sommes principalement basés sur Bourbaki, Humphreys, Koszul et les notes de cours de Christophe Hohlweg.

Nous consacrons un chapitre, le premier, à définir les notions importantes des groupes de Coxeter. Après avoir détaillé la classification des groupes de Coxeter de rang 3, nous nous concentrerons sur la représentation des groupes de Coxeter hyperboliques de rang 3. Dans la littérature, les groupes de Coxeter hyperboliques de rang 3 sont soit représentés dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 soit dans l'espace hyperbolique. Il est connu que ces deux représentations sont équivalentes, pourtant le passage de l'une à l'autre n'est pas toujours exposé avec détails. Un des buts de ce mémoire est d'explicitier le lien entre ces deux représentations, ce sera fait au chapitre 3. Au dernier chapitre, nous établissons la classification des groupes de Coxeter hyperboliques de rang n . En annexe se trouve la liste des symboles utilisés.

CHAPITRE I

GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES DE COXETER

Dans le présent chapitre, nous allons établir les notations et rappeler les notions de base de la théorie des groupes de Coxeter, telles que la forme bilinéaire canonique, la représentation canonique et les chambres de Tits. Cela dit, pour avoir plus de détails, il est intéressant de lire (Bourbaki, 1981) et (Humphreys, 1990).

Définition 1.1 *Un groupe de Coxeter W est un groupe (fini ou non), engendré par un ensemble S fini, tel que pour tout élément s et t de S , nous avons les relations :*

$$\begin{cases} s^2 = e, \\ (st)^{m_{s,t}} = e, \quad \text{avec } m_{s,t} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \text{ l'ordre de } st \end{cases}$$

où e est l'élément neutre de W et $m_{s,t} \neq 1$ si $s \neq t$. De ces deux relations, nous pouvons déduire que pour tout s, t de S : $m_{s,t} = m_{t,s}$.

La donnée (W, S) est appelée un système de Coxeter.

Le rang de W est la cardinalité de S .

L'ensemble de générateurs S et les relations décrites ci-dessus forment une présentation du groupe W . Pour mettre en évidence la présentation, W est souvent écrite sous la forme $W = \langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{i,j}} = e, \forall s_i, s_j \in S, s_i^2 = e, \forall i \rangle$.

Finalement, nous pouvons voir les éléments de S comme des lettres dont est composé un mot w de W . Grâce aux relations entre les lettres, un même mot peut s'écrire de plusieurs manières différentes.

Exemple 1.1

$$W = \langle s_1, s_2, s_3 \mid s_1^2 = e, s_2^2 = e, s_3^2 = e, (s_1 s_2)^3 = e, (s_1 s_3)^3 = e, (s_2 s_3)^4 = e \rangle$$

est un groupe de Coxeter.

Des relations $(s_1 s_2)^3 = e$, $s_1^2 = e$, $s_2^2 = e$, nous déduisons que :

$$s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 = e \Leftrightarrow s_1 s_2 s_1 s_2 = s_2 s_1 \Leftrightarrow s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 s_1$$

Il est possible de représenter cette dernière relation par la figure suivante.

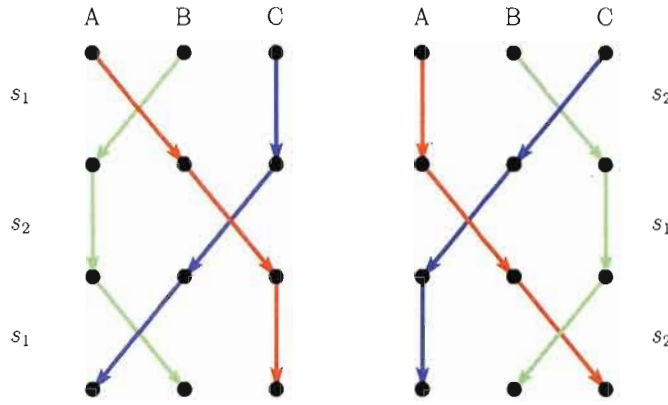


Figure 1.1 Représentation de $s_1 s_2 s_1$ et $s_2 s_1 s_2$

Sur la figure 1.1, nous avons représenté s_1 et s_2 par la permutation des trois points A, B et C : s_1 permute (A,B,C) en (B,A,C) et s_2 permute (A,B,C) en (A,C,B). Nous voyons clairement que $s_1 s_2 s_1$ et $s_2 s_1 s_2$ transforment tous les deux (A,B,C) en (C,B,A).

Plaçons-nous dans le groupe de tresses, pour lequel l'ensemble des générateurs est le même ainsi que les relations à la différence que les s_i ne sont pas des involutions, mais sont plutôt d'ordre infini. Dans ce nouveau contexte, nous représentons les s_i par une manière de tresser trois cordes.

Les cordes sont fixées aux deux extrémités, mais pas aux points intermédiaires. De plus, les cordes sont dans \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire qu'ici il y a un ordre pour changer les cordes de

place. Mettre la corde rouge au milieu en la passant au-dessus de la verte ne représente pas la même chose que si la corde rouge est passée au-dessous de la verte. Pour cette raison, lorsque nous intervertissons deux cordes, nous prenons comme convention de mettre celle de gauche au-dessus de celle de droite.

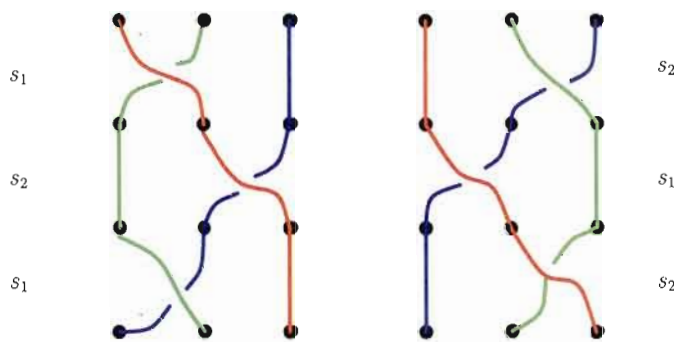


Figure 1.2 Relation de tresse

Appliquer s_1 aux cordes revient à intervertir les deux premières cordes, s_2 à intervertir les deux dernières. Sur la figure 1.2, nous avons représenté $s_1s_2s_1$ et $s_2s_1s_2$. Nous pouvons remarquer que ces deux représentations sont isotopes ; c'est-à-dire dans les deux cas, chaque corde de la même couleur est fixée par la même paire de points et elle est située dans le même ordre : la bleue au-dessous, puis la verte et la rouge le plus au-dessus.

Puisque ce contexte de groupe de tresses fait état de la relation entre s_1 et s_2 , la relation $s_2s_1s_2 = s_1s_2s_1$ est appelée « relation de tresses », et ce, même si W est un groupe de Coxeter et non un groupe de tresses.

Remarquons que $w = s_1s_2s_1s_2 = s_2s_1$ est un élément de W ayant deux écritures comportant un nombre différent de lettres. Il est utile de préciser la notion de longueur d'un élément w .

Définition 1.2 La longueur d'un élément de W est la fonction suivante :

$$l : W \rightarrow \mathbb{N}$$

$$w \mapsto \min\{n \mid w = s_1 \dots s_n, s_i \in S\}$$

Plusieurs propriétés découlent de cette définition.

Proposition 1.1 *Soient $w, w' \in W, s \in S$, alors nous avons les relations suivantes :*

1. $l(w) = l(w^{-1})$
2. $l(w) = 1 \Leftrightarrow w \in S$
3. $l(ww') \leq l(w) + l(w')$
4. $l(ww') \geq l(w) - l(w')$
5. $l(w) - 1 \leq l(ws) \leq l(w) + 1$
6. $l(ws) = l(w) \pm 1$
7. $l(ww') = l(w) + l(w') \pmod{2}$

Définition 1.3 *La matrice de Coxeter de (W, S) est la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ dont les entrées sont les exposants $m_{s,t}$. Remarquons que M est symétrique, et que pour tout s, t dans S nous avons :*

$$\begin{cases} m_{s,t} \geq 1, \\ m_{s,t} = 1 \iff s = t \end{cases}$$

puisque $m_{s,t}$ est l'ordre de (st) .

Exemple 1.2 La matrice de Coxeter associé au groupe de Coxeter de l'exemple 1.1 est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.4 *Le graphe de Coxeter de (W, S) est le graphe dont les sommets sont étiquetés par les éléments de S . Deux sommets s et t sont reliés par une arête $\{s, t\}$ si et seulement si $m_{s,t} > 2$. De plus, celle-ci est étiquetée par $m_{s,t}$ lorsque $m_{s,t} > 3$.*

Exemple 1.3 Le graphe de Coxeter du groupe de Coxeter de l'exemple 1.1 est montré à la figure 1.3.

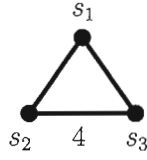


Figure 1.3 Graphe de Coxeter de l'exemple 1.1

Exemple 1.4 Soit W ayant la matrice de Coxeter suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Son graphe de Coxeter est montré à la figure 1.4.

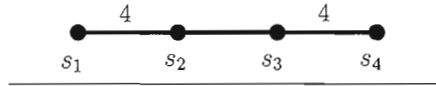


Figure 1.4 Graphe de Coxeter de l'exemple 1.4

Remarque :

Si pour un groupe de Coxeter W , deux éléments s_i et s_j satisfont la relation $(s_i s_j)^2 = e$, alors nous avons les équivalences suivantes :

$$(s_i s_j)^2 = e \Leftrightarrow s_i s_j s_i s_j = e \Leftrightarrow s_i s_j = s_j s_i$$

Cela signifie que lorsque $m_{i,j} = 2$, s_i et s_j commutent. Or, $m_{i,j} = 2$ si et seulement si les sommets s_i et s_j ne sont pas reliés par une arête dans le graphe de Coxeter, donc lorsque deux sommets s_i, s_j ne sont pas reliés dans le graphe, les éléments s_i, s_j commutent dans W .

De plus, si un graphe de Coxeter Γ est la réunion disjointe de deux graphes Γ_1 et Γ_2

alors $W = W_1 \times W_2$ (produit direct) où W_1 est le groupe de Coxeter associé à Γ_1 et W_2 à Γ_2 . En effet, chaque élément de W associé à un sommet de Γ_1 commute avec tous ceux qui sont associés à un sommet de Γ_2 , il est donc possible de commuter les premiers avec les seconds pour avoir tout mot w écrit d'abord avec uniquement des lettres associées à Γ_1 , puis avec uniquement des lettres associées à Γ_2 .

Il est intéressant de se demander dans quelles conditions un groupe de Coxeter est fini ou non. Par la remarque précédente, nous pouvons restreindre l'étude aux groupes de Coxeter dont le graphe est connexe; puisque si un groupe est le produit direct d'un nombre fini de groupes finis, alors il est fini.

Définition 1.5 *Un groupe de Coxeter dont le graphe est connexe, est dit irréductible.*

Proposition 1.2 *Soit W , un groupe de Coxeter. Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ les composantes connexes du graphe de W . Si $I \subseteq S$, alors W_I dénote le sous-groupe de W engendré par I . Soient $I_j = \{s \in S \mid s \text{ est un sommet de } \Gamma_j\}$, pour $j = 1, \dots, n$. Alors (W_{I_j}, I_j) est un système de Coxeter. De plus, nous avons :*

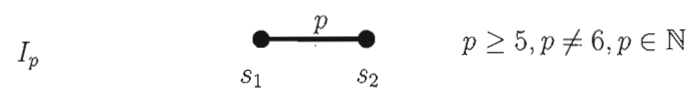
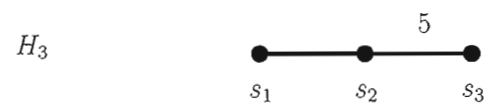
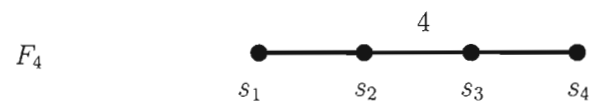
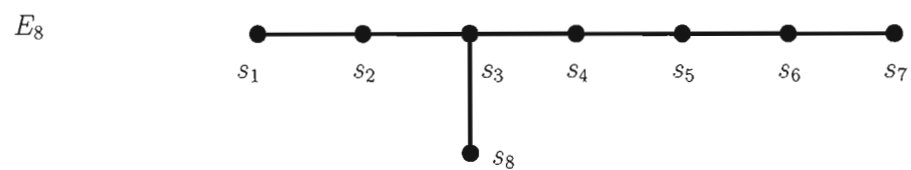
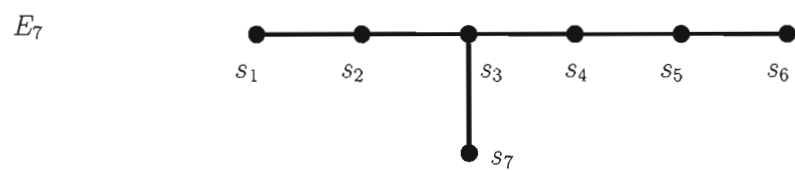
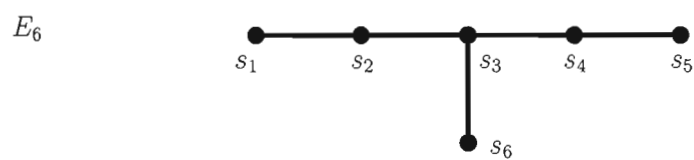
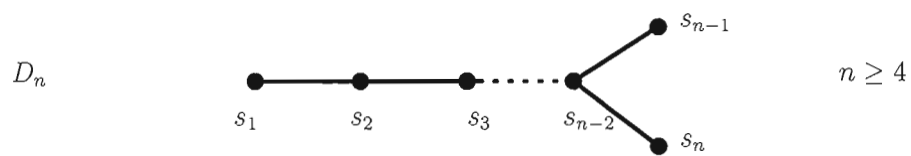
$$W \simeq W_{I_1} \times \dots \times W_{I_n}$$

En travaillant avec les graphes, il est possible de déduire la liste des graphes de Coxeter connexes pour lesquels W est fini. Il est aussi possible de prouver que les groupes de Coxeter associés à ces graphes sont en fait les seuls à être finis.

Théorème 1.1 *Les graphes connexes pour lesquels W est un groupe de Coxeter fini sont :*

$$A_n (\simeq S_{n+1}) \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad \quad s_{n-1} \quad s_n \end{array} \quad n \geq 1$$

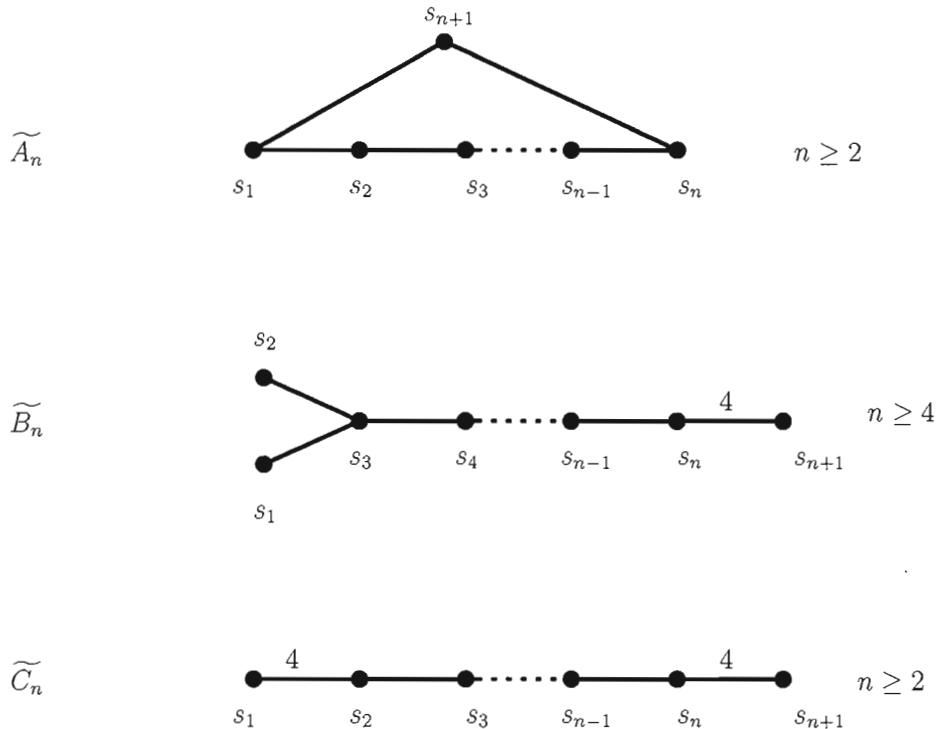
$$BC_n \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \overset{4}{\bullet} \text{---} \bullet \\ s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad \quad s_{n-2} \quad s_{n-1} \quad s_n \end{array} \quad n \geq 2$$

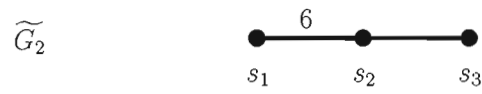
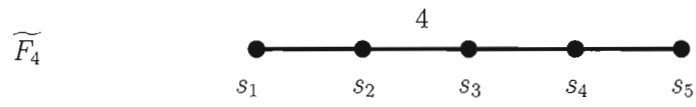
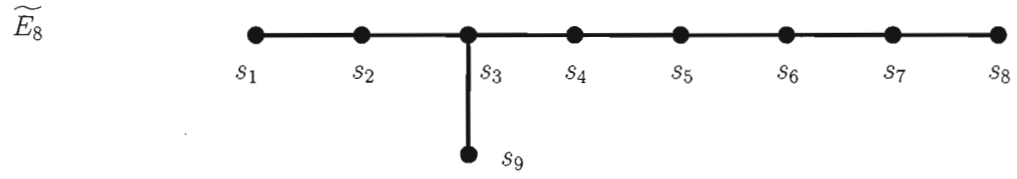
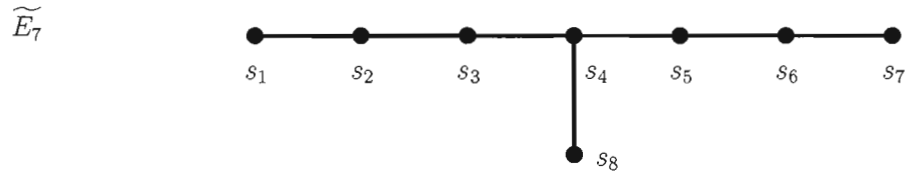
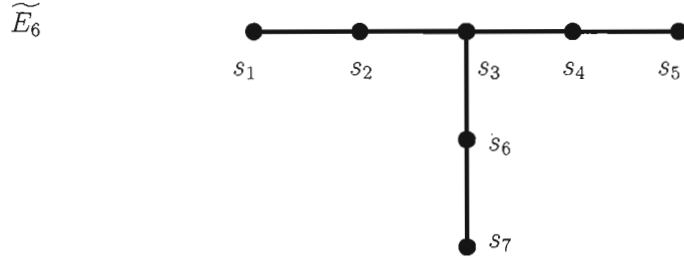
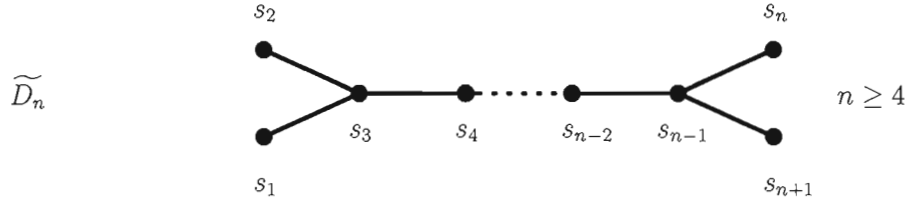


Dans les chapitres 2 et 4, nous exposerons une classification des groupes de Coxeter, grâce à laquelle un groupe de Coxeter est soit fini, soit affine soit hyperbolique. Les groupes de Coxeter finis sont, comme leur nom l'indique, les seuls groupes de Coxeter à être finis. Ce sont les groupes décrits par le théorème 1.1. La classification des groupes de Coxeter hyperboliques est le sujet principal de ce mémoire. Or, celle-ci s'appuie sur celles des groupes de Coxeter finis et affines. Elle se base sur les théorèmes 1.1 et 1.2. C'est pour cela que nous présentons d'un même souffle le théorème 1.2, même si nous n'avons pas encore écrit ce que cela signifie d'être un groupe de Coxeter affine. Pour l'instant, disons simplement qu'un groupe de Coxeter affine est un groupe engendré par des réflexions dans un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien de dimension fini.

Pour en savoir d'avantage sur les groupes de Coxeter finis et affines et pour voir la preuve des théorèmes 1.1 et 1.2, il est intéressant de lire (Joyal, 1982).

Théorème 1.2 *Les graphes connexes pour lesquels W est un groupe de Coxeter affine sont :*





Pour la suite, V sera un espace vectoriel sur \mathbb{R} , de dimension finie. Soit $\{e_s \mid s \in S\}$, une base de V indexée par S . Dans ce cas, $\dim_{\mathbb{R}} V = |S|$.

Définition 1.6 La forme bilinéaire \mathcal{B} associée à la matrice de Coxeter M est :

$$\mathcal{B} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v_1, v_2) \mapsto \mathcal{B}(v_1, v_2),$$

$$\text{telle que } \mathcal{B}(e_s, e_t) = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right) \quad \forall s, t \in S$$

La forme bilinéaire \mathcal{B} peut s'écrire sous forme matricielle, et nous utilisons la notation B pour la matrice de \mathcal{B} . Les deux notations reviennent au même ; lorsque v_1 et v_2 sont deux vecteurs coordonnées dans la base $\{e_s \mid s \in S\}$, nous avons $\mathcal{B}(v_1, v_2) = v_1^T B v_2$.

Définition 1.7 Une représentation R de W dans V est un homomorphisme de groupes $R : W \rightarrow GL(V)$, où $GL(V)$ est le groupe des automorphismes de V , c'est-à-dire les endomorphismes linéaires et inversibles.

Définition 1.8 La représentation canonique de W dans V est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma : W &\rightarrow GL(V) & \text{où,} & & \sigma_{s_i} : V &\rightarrow V \\ w &\mapsto \sigma_{s_1} \dots \sigma_{s_n} \text{ pour } w = s_1 \dots s_n & e_j &\mapsto e_j - 2\mathcal{B}(e_i, e_j)e_i \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que pour tout $s \in S$, σ_s est une transformation linéaire inversible et que σ est bien définie. Il suffit de noter que $\sigma_s^2 = I_n$. En effet,

$$\begin{aligned} \sigma_s(\sigma_s(v)) &= (v - 2\mathcal{B}(e_s, v)e_s) - 2\mathcal{B}(e_s, v - 2\mathcal{B}(e_s, v)e_s)e_s \\ &= v - 2\mathcal{B}(e_s, v)e_s - 2\mathcal{B}(e_s, v)e_s + 4\mathcal{B}(e_s, v)\mathcal{B}(e_s, e_s)e_s \\ &= v \end{aligned}$$

Il faut aussi vérifier que σ préserve les relations sur W . Comme $\sigma_s^2 = I_n$, $\forall s \in S$, nous avons :

$$ss = e \Rightarrow \sigma_s(\sigma_s(v)) = (\sigma_s \sigma_s)(v) = \sigma(e)(v) = v$$

Pour la relation entre s et t où $s \neq t$, il faut décomposer V en deux sous-espaces : $\langle e_s, e_t \rangle$ et $\langle e_{s'} \mid \mathcal{B}(e_s, e_{s'}) = \mathcal{B}(e_t, e_{s'}) = 0 \rangle$. Si nous écrivons σ_s et σ_t sous forme matricielle,

nous obtenons la matrice identité pour le produit de σ_s et σ_t restreint au deuxième sous-espace et les matrices suivantes si σ_s et σ_t sont restreints au premier sous-espace :

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} -1 & 2 \cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right) & -1 \end{pmatrix}$$

De cela, nous obtenons que

$$\sigma_s \sigma_t = \begin{pmatrix} 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right) - 1 & -2 \cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right) \\ 2 \cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right) & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\sigma_s \sigma_t$ est conjugué à une matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{m_{s,t}}$. Nous obtenons donc la matrice identité lorsque nous multiplions $m_{s,t}$ fois cette matrice. Nous pouvons aussi voir ce résultat en diagonalisant $\sigma_s \sigma_t$. Ses valeurs propres sont 1 et $e^{2i\pi/m}$, où $m = m_{s,t}$. Soit P la matrice ayant les vecteurs propres associés aux valeurs propres pour colonnes. Alors

$$\begin{aligned} (\sigma_s \sigma_t)^{m_{s,t}} &= P \begin{pmatrix} \left(\cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right) \right)^{2 m_{s,t}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2 m_{s,t} \pi}{m_{s,t}}\right) + i \sin\left(\frac{2 m_{s,t} \pi}{m_{s,t}}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = I \end{aligned}$$

De plus, $m_{s,t}$ est le plus petit entier satisfaisant l'égalité décrite ci-dessus. En effet, si $m = m_{s,t}$, alors l'ordre de la valeur propre $e^{2i\pi/m}$ est $m = m_{s,t}$.

Nous retrouvons donc une relation équivalente à la relation de tresse :

$$(st)^{m_{s,t}} = e, \text{ pour } s \neq t \Rightarrow (\sigma_s \sigma_t)^{m_{s,t}}(v) = v$$

où, $m_{s,t}$ est l'ordre de st .

La proposition suivante est une propriété importante et nous allons l'utiliser dans plusieurs démonstrations.

Proposition 1.3 *L'action de $\sigma(W)$ laisse \mathcal{B} stable, c'est-à-dire*

$$\mathcal{B}(\sigma(w)(x), \sigma(w)(y)) = \mathcal{B}(x, y), \forall w \in W, \forall x, y \in V$$

Démonstration. Pour $s \in S$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\sigma_s(x), \sigma_s(y)) &= \mathcal{B}(x - 2\mathcal{B}(x, e_s)e_s, y - 2\mathcal{B}(y, e_s)e_s) \\
&= \mathcal{B}(x, y) - 2\mathcal{B}(y, e_s)\mathcal{B}(x, e_s) - 2\mathcal{B}(x, e_s)\mathcal{B}(e_s, y) \\
&\quad + 4\mathcal{B}(x, e_s)\mathcal{B}(y, e_s)\mathcal{B}(e_s, e_s) \\
&= \mathcal{B}(x, y)
\end{aligned}$$

Lorsque $w \notin S$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\sigma(w)(x), \sigma(w)(y)) &= \mathcal{B}(\sigma(s_1 \dots s_n)(x), \sigma(s_1 \dots s_n)(y)) \\
&= \mathcal{B}(\sigma_1 \dots \sigma_n(x), \sigma_1 \dots \sigma_n(y)) \\
&= \mathcal{B}(\sigma_2 \dots \sigma_n(x), \sigma_2 \dots \sigma_n(y)) \\
&= \dots = \mathcal{B}(x, y)
\end{aligned}$$

□

Définition 1.9 L'espace dual de V est $V^* = \{\lambda \mid \lambda : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une forme linéaire}\}$. Soit $\{e_i^* \mid i \in S\}$ la base duale de V^* par rapport à la base $\{e_i \mid i \in S\}$ définie par la propriété suivante :

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{pour } j = i \\ 0, & \text{pour } j \neq i \end{cases}$$

Proposition 1.4 Lorsque \mathcal{B} est non dégénérée, il est possible d'identifier V avec son espace dual par l'isomorphisme Λ .

$$\Lambda : V \rightarrow V^*$$

$$v \mapsto \lambda_v$$

où λ_v est la forme linéaire définie par $\lambda_v(x) = \mathcal{B}(v, x)$ pour tout $x \in V$. $\lambda_v(x)$ est aussi noté $\langle \lambda_v, x \rangle$.

Démonstration. Premièrement, nous avons que $\lambda_v \in V^*$, $\forall v \in V$, car \mathcal{B} est une forme bilinéaire, et cela implique que $\lambda_v(x) = \mathcal{B}(v, x)$ est une forme linéaire.

$$\lambda_{c_1u + c_2v}(x) = \mathcal{B}(c_1u + c_2v, x) = c_1\mathcal{B}(u, x) + c_2\mathcal{B}(v, x) = c_1\lambda_u(x) + c_2\lambda_v(x), \forall x \in V$$

De cela nous avons que Λ est une transformation linéaire puisque nous avons :

$$\Lambda(c_1u + c_2v) = \lambda_{c_1}u + c_2v$$

De plus, B est non dégénérée par hypothèse, ce qui implique que $\ker(\Lambda) = \{0\}$. Donc Λ est un monomorphisme. Et comme, $\dim(V) = \dim(V^*) < \infty$, Λ est bien un isomorphisme. \square

Définition 1.10 *Nous définissons la représentation canonique duale du groupe de Coxeter W :*

$$\sigma^* : W \rightarrow GL(V^*)$$

$$w \mapsto \sigma^*(w) : V^* \rightarrow V^*$$

$$\lambda \mapsto \sigma^*(w) \circ \lambda = \lambda \circ \sigma(w^{-1})$$

Il est connu que l'égalité $\sigma^*(w) \circ \lambda = \lambda \circ \sigma(w^{-1})$ est équivalent à

$$\langle \sigma^*(w)\lambda, \sigma(w)(v) \rangle = \langle \lambda, \sigma(w)^{-1}\sigma(w)(v) \rangle = \langle \lambda, v \rangle \quad \forall \lambda \in V^*, v \in V$$

Définition 1.11 *Nous définissons les notions suivantes :*

- *Le demi-espace ouvert $A_s = \{\lambda \in V^* \mid \langle \lambda, e_s \rangle > 0\}$,*
- *Le demi-espace fermé $\bar{A}_s = \{\lambda \in V^* \mid \langle \lambda, e_s \rangle \geq 0\}$,*
- *$C = \bigcap_{s \in S} A_s$, appelée la chambre fondamentale,*
- *L'hyperplan $H_s = \{\lambda \in V^* \mid \langle \lambda, e_s \rangle = 0\}$, appelé un mur de C ,*
- *$D = \bigcap_{s \in S} \bar{A}_s$, appelé le domaine fondamental*
En général, un ensemble D est un domaine fondamental pour l'action d'un groupe G sur un ensemble E lorsque la G -orbite de tout point de E rencontre D en exactement un point. Dit autrement, nous avons : $Gx \cap D = \{x\}$, $\forall x \in E$. Le fait que l'ensemble

$\bigcap_{s \in S} \bar{A}_s$ est bel et bien un domaine fondamental est prouvé dans (Humphreys, 1990).

$\cdot U = \bigcup_{w \in W} \sigma(w)D$, appelé le cône de Tits

Exemple 1.5 Dans le cas où V est de dimension 3, la chambre fondamentale, $C \subseteq V^*$, est :

$$\begin{aligned} C &= \{\lambda : V \rightarrow \mathbb{R} \mid \langle \lambda, e_1 \rangle > 0, \langle \lambda, e_2 \rangle > 0, \langle \lambda, e_3 \rangle > 0\} \\ &= \{\lambda = ae_1^* + be_2^* + ce_3^* \mid a, b, c > 0\} \end{aligned}$$

Si B est non dégénérée, en utilisant l'isomorphisme de la proposition 1.4, l'image de C dans V devient :

$$\Lambda^{-1}(C) = \{v \in V \mid \mathcal{B}(v, e_i) > 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3\}$$

La proposition suivante est un résultat connu, c'est un exercice dans (Humphreys, 1990).

Proposition 1.5 W est fini si et seulement si $U = V^*$

Remarque :

Lorsque B est définie positive, la forme bilinéaire symétrique \mathcal{B} est un produit scalaire et nous notons \cdot . En effet, un produit scalaire est défini comme étant une application bilinéaire, symétrique et définie positive. Alors, nous notons $\lambda_v(x) = \mathcal{B}(v, x) = \langle \lambda_v, x \rangle = v \cdot x \ \forall v \in V, \forall x \in V$. Trouvons v , l'image inverse de e_s^* pour l'isomorphisme de la proposition 1.4. Puisque $\langle e_s^*, e_s \rangle = 1$, nous avons $v \cdot e_s = 1$ et $v \cdot x = 0 \ \forall x \perp e_s$. Alors $v = c e_s$ avec c un scalaire. Et

$$c e_s \cdot e_s = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{e_s \cdot e_s} \Rightarrow v = \frac{e_s}{e_s \cdot e_s}$$

Or $\frac{e_s \cdot x}{e_s \cdot e_s} e_s$ est la projection de x sur e_s et $\sigma_s(x)$ devient :

$$\sigma_s(x) = x - 2v \cdot x = x - 2 \frac{e_s \cdot x}{e_s \cdot e_s} e_s$$

ce qui définit une réflexion d'hyperplan H_s .

Exemple 1.6 Représentons $I_3 = \langle s_1, s_2 \mid s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^3 = e \rangle$.

Prenons $\{e_1, e_2\}$ pour base de $V = \mathbb{R}^2$. Soit α , l'angle entre H_{s_1} et H_{s_2} . Comme $(\sigma_{s_1} \sigma_{s_2})^3(v) = v \ \forall v \in V$, alors $3(2\alpha) = 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$.

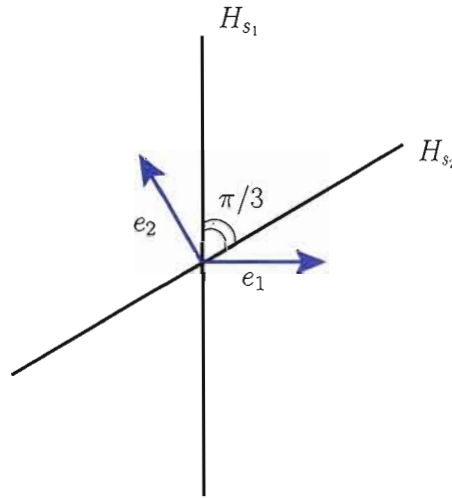


Figure 1.5 Vecteurs générateurs de V

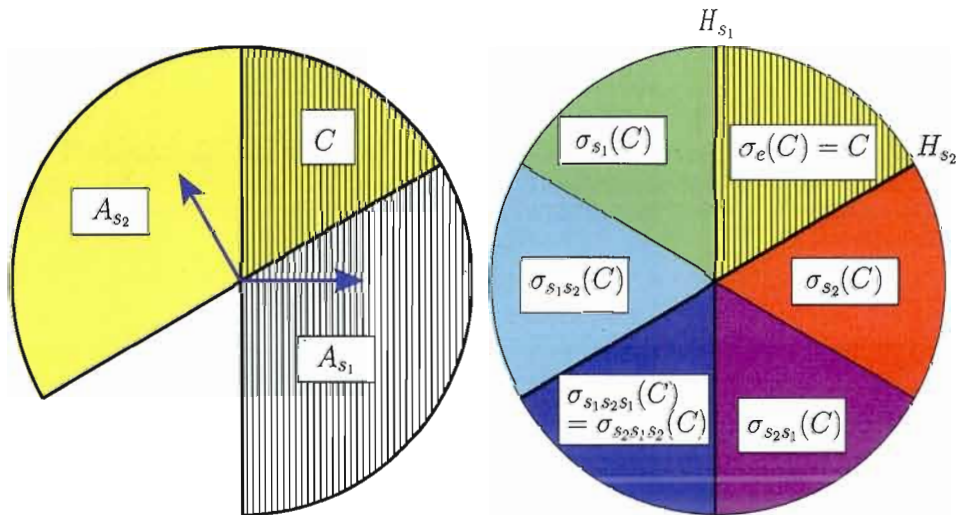


Figure 1.6 Chambre fondamentale et représentation de I_3

C est l'intersection entre A_{s_1} et A_{s_2} , montrée par la zone jaune hachurée de la figure

1.6. La chambre fondamentale représente e , l'élément neutre de W . De plus, pour tout w dans W , $\sigma_w(C)$ représente w . Nous pouvons voir ici un exemple où $U = V^*$, et le groupe est bien fini puisqu'il a 6 éléments. Nous obtenons ce que la proposition 1.5 établissait.

La prochaine proposition relie les notions de chambre fondamentale, de demi-espace ouvert et de longueur des mots.

Proposition 1.6 *Soient $s \in S$ et $w \in W$ alors, nous avons :*

$$l(sw) > l(w) \Leftrightarrow \sigma_w(C) \subseteq A_s$$

$$l(sw) < l(w) \Leftrightarrow \sigma_w(C) \subseteq -A_s$$

CHAPITRE II

CLASSIFICATION DES GROUPES DE COXETER DE RANG 3

Dans ce chapitre, nous allons établir la classification des groupes de Coxeter de rang 3. Pour la suite, nous noterons s_1, s_2 et s_3 les éléments de S . Dans l'exemple 1.6, nous avons vu que l'angle entre deux hyperplans de réflexion H_{s_1} et H_{s_2} était déterminé par m_{s_1, s_2} . Plus précisément, cet angle valait $\frac{\pi}{m_{s_1, s_2}}$. Ce résultat est généralisable pour tous les groupes de Coxeter, notamment ceux de rang 3. De plus, le domaine fondamental D est délimité par H_{s_1}, H_{s_2} et H_{s_3} . Or, la somme des angles $\frac{\pi}{m_{s_1, s_2}}, \frac{\pi}{m_{s_1, s_3}}$ et $\frac{\pi}{m_{s_2, s_3}}$ ne vaut pas nécessairement π . La classification des groupes de Coxeter de rang 3 est basée sur ce fait.

Nous allons voir en premier lieu que lorsque la somme de ces angles est respectivement supérieure, égale ou inférieure à π , alors B est définie positive, dégénérée non-négative, ou de signature $(2, 1)$, (c.-à-d. B a 2 valeurs propres positives et une valeur propre négative). En second lieu, étant donné le cas de figure de B , nous allons retrouver trois situations, respectivement le groupe de Coxeter sera représenté par un sous-groupe d'isométries de l'espace euclidien, affine, et hyperbolique. Pour cette raison, les groupes de Coxeter de rang 3 sont dit *finis*, *affines* ou *hyperboliques*.

Théorème 2.1 (de Sylvester) *Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Soit $\mathcal{B} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. Alors, il existe une base $F = (f_1, \dots, f_n)$ et il existe*

trois entiers $r, s, t \geq 0$ avec $r + s + t = n$ tels que :

$$\mathcal{B}(f_i, f_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq i \leq r \\ -1, & \text{si } r + 1 \leq i \leq r + s \\ 0, & \text{si } r + s + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

La matrice de \mathcal{B} par rapport à F a donc la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & O_t \end{pmatrix}$$

De plus, (r, s) , la signature de la forme bilinéaire \mathcal{B} est unique.

Proposition 2.1 Soit (W, S) un système de Coxeter de rang 3. Soient p, q, r tels que : $p = m_{s_1 s_2}$, $q = m_{s_1 s_3}$ et $r = m_{s_2 s_3}$, posons $d = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Soit B la matrice de la forme bilinéaire canonique \mathcal{B} :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) & 1 & -\cos\left(\frac{\pi}{r}\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{r}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, nous avons que :

$$B \text{ est } \begin{cases} \text{définie positive,} & \text{si } d > 1 ; \\ \text{dégénérée non-négative,} & \text{si } d = 1 ; \\ \text{de signature } (2, 1), & \text{si } d < 1. \end{cases}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons considérer que les (p, q, r) sont tels que $p \leq q \leq r$.

Nous allons utiliser l'élimination de Gauss pour trouver une matrice P inversible telle que : $PBP^T = D$ où D est une matrice diagonale ayant des $0, \pm 1$ sur la diagonale. Il est possible de réaliser ceci par le théorème 2.1.

$$\begin{aligned}
 P_1 B P_1^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) & 1 & 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) & 1 & -\cos\left(\frac{\pi}{r}\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{r}\right) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{r}\right) \\ 0 & -\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{r}\right) & 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nous supposons ici que $p \neq \infty$. Dans ce qui suivra, nous étudierons le cas $p = \infty$.

$$P_2 P_1 B P_1^T P_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \\ 0 & -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} & \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)} \end{pmatrix}$$

$$\text{où } P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_3 P_2 P_1 B P_1^T P_2^T P_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\star \end{pmatrix}$$

$$\text{où } P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{r}\right) & 0 \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } -\star = - \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)^2}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)^2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)$$

Il faut maintenant étudier le signe de l'entrée $-\star$ de la matrice obtenue :

$$\begin{aligned} (-\star) &= - \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)^2}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} + \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right) \\ &= - \frac{\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \cos\left(\frac{\pi}{r}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} + \sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right) \\ &= - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \cos\left(\frac{\pi}{r}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \\ &\quad + \frac{\left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right) \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \\ &= - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \cos\left(\frac{\pi}{r}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)} \\
& = \frac{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)}
\end{aligned}$$

Considérons la fonction :

$$f(x) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2(x) - 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos(x)$$

sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. Sur cet intervalle, $f(x)$ est une fonction croissante puisque $\cos(x)$ est une fonction décroissante. Il faut aussi noter que $\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ sont positifs puisque $p, q > 1$.

$$\begin{aligned}
f(\pi - \pi/p - \pi/q) &= 1 - \cos^2(\pi/p) - \cos^2(\pi/q) - \cos^2(\pi - \pi/p - \pi/q) \\
&\quad - 2\cos(\pi/p)\cos(\pi/q)\cos(\pi - \pi/p - \pi/q) \\
&= 1 - \cos^2(\pi/p) - \cos^2(\pi/q) - [-\cos(\pi/p)\cos(\pi/q) + \sin(\pi/p)\sin(\pi/q)]^2 \\
&\quad - 2\cos(\pi/p)\cos(\pi/q)(-\cos(\pi/p)\cos(\pi/q) + \sin(\pi/p)\sin(\pi/q)) \\
&= 1 - \cos^2(\pi/p) - \cos^2(\pi/q) \\
&\quad - [\cos^2(\pi/p)\cos^2(\pi/q) - 2\cos(\pi/p)\cos(\pi/q)\sin(\pi/p)\sin(\pi/q) + \sin^2(\pi/p)\sin^2(\pi/q)] \\
&\quad + 2\cos^2(\pi/p)\cos^2(\pi/q) - 2\cos(\pi/p)\cos(\pi/q)\sin(\pi/p)\sin(\pi/q) \\
&= 1 - \cos^2(\pi/p) - \cos^2(\pi/q) + \cos^2(\pi/p)\cos^2(\pi/q) - \sin^2(\pi/p)\sin^2(\pi/q) \\
&= 1 - \cos^2(\pi/p)(1 - \cos^2(\pi/q)) - \cos^2(\pi/q) - \sin^2(\pi/p)\sin^2(\pi/q) \\
&= 1 - \cos^2(\pi/p)\sin^2(\pi/q) - \cos^2(\pi/q) - \sin^2(\pi/p)\sin^2(\pi/q) \\
&= 1 - \sin^2(\pi/q) - \cos^2(\pi/q) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme f est croissante, nous avons :

$$(-\star) \begin{cases} > 0 & \text{si } \frac{\pi}{r} > \pi - \frac{\pi}{p} - \frac{\pi}{q}, \\ = 0 & \text{si } \frac{\pi}{r} = \pi - \frac{\pi}{p} - \frac{\pi}{q}, \\ < 0 & \text{si } \frac{\pi}{r} < \pi - \frac{\pi}{p} - \frac{\pi}{q}. \end{cases}$$

◦ Lorsque $(-\star) > 0$, alors :

$$\begin{aligned} P_4 P_3 P_2 P_1 B P_1^T P_2^T P_3^T P_4^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{-\star})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{-\star})^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par le théorème de Sylvester B est définie positive.

◦ Lorsque $(-\star) = 0$, alors :

$$P_3 P_2 P_1 B P_1^T P_2^T P_3^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-T}$$

Alors le théorème de Sylvester donne que B est dégénérée et non négative.

◦ Lorsque $(-\star) < 0$, alors :

$$\begin{aligned} P_4 P_3 P_2 P_1 B P_1^T P_2^T P_3^T P_4^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{\star})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{\star})^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par le théorème de Sylvester, B est de signature $(2, 1)$.

Pour $p \neq \infty$, nous avons bien le résultat recherché :

$$B \text{ est } \begin{cases} \text{définie positive,} & \text{si } d > 1; \\ \text{dégénérée non-négative,} & \text{si } d = 1; \\ \text{de signature } (2, 1), & \text{si } d < 1 \end{cases}$$

Voyons maintenant le cas où $p = \infty$.

Comme les (p, q, r) sont tels que $p \leq q \leq r$, il reste uniquement le cas (∞, ∞, ∞) à traiter.

Nous avons que B devient :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec la même démarche que précédemment, nous obtenons :

$$P_4 P_3 P_2 P_1 B P_1^T P_2^T P_3^T P_4^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc B est de signature $(2, 1)$ et c'est ce qu'il fallait puisque $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} < 1$

□

Il nous reste à expliquer les liens entre le fait que B soit définie positive et celui que W soit un groupe de Coxeter fini ; le fait que B soit dégénérée et celui que W soit un groupe de Coxeter affine, et finalement le fait que B soit de signature $(2, 1)$ et celui que W soit un groupe de Coxeter hyperbolique.

2.1 B définie positive et W est un groupe de Coxeter fini

Par la proposition 2.1, lorsque B est définie positive $d = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$. Voici les cas possibles tous les triplets (p, q, r) :

- $(2, 2, x)$ avec $x \geq 2, x \in \mathbb{N}$, nous avons bien : $1/2 + 1/2 + 1/x > 1 \forall x \in \mathbb{N}$
- $(2, 3, 3)$, $(d = 7/6)$
- $(2, 3, 4)$, $(d = 13/12)$
- $(2, 3, 5)$, $(d = 31/30)$

Pour prouver que lorsque B est définie positive, W est un groupe fini, il faut d'abord prouver que W est un sous-groupe discret du groupe orthogonal $O(B)$.

Définition 2.1 *Un ensemble H est discret si pour tout $h \in H$, il existe un voisinage V_h contenant h tel que $V_h \cap H = \{h\}$*

Lemme 2.1 *Lorsque B est non-dégénérée, W est un sous-groupe discret du groupe orthogonal*

$$O(B) = \{g \in \text{End}(V^*) \mid B(g(x), g(y)) = B(x, y) \forall x, y \in V^*\}$$

Démonstration. Lorsque B est non-dégénérée, par la proposition 1.4, nous pouvons identifier V et V^* . Soit $C_0 = \{g \in GL(V^*) \mid gx \in C\}$, pour un $x \in C$ fixé. C_0 est l'image inverse de l'ouvert C de la fonction continue

$$f : GL(V^*) \rightarrow V^*$$

$$g \mapsto gx$$

C_0 est donc un ensemble ouvert. Pour tout $w \in W$ nous obtenons $C \cap \sigma^*(w)x = \{x\}$ en appliquant f à $C_0 \cap \sigma^*(w)$, car $\bar{C} = D$ est un domaine fondamental pour l'action de W sur U . Ainsi, nous avons, $C_0 \cap \sigma^*(W) = \{e\}$.

Donc, en prenant un $g \in \sigma^*(W)$, nous avons $gC_0 \cap g\sigma^*(W) = gC_0 \cap \sigma^*(W) = \{g\}$. $\sigma^*(W)$ est donc un sous-groupe discret de $GL(V^*)$. Par le transport de structure dû à l'identification de V et V^* , $\sigma(W)$ est un sous-groupe discret de $GL(V)$. Par la proposition

1.3, \mathcal{B} est stable pour l'action de $\sigma(W)$. Comme $\sigma(W)$ est un sous-ensemble de $O(\mathcal{B})$, on obtient que $\sigma(W)$ est un sous-ensemble discret de $O(\mathcal{B})$. \square

Proposition 2.2 *Si B est définie positive, alors W est fini.*

Démonstration. Nous identifions V et V^* . Comme \mathcal{B} est un produit scalaire, V est simplement un espace vectoriel euclidien. En utilisant une base orthonormale de V , il est possible d'identifier $\sigma(W)$ avec un sous-groupe du groupe orthogonal $O(\mathcal{B}) = O(n, \mathbb{R})$. $O(n, \mathbb{R})$ est un sous-ensemble compact de l'ensemble des matrices $n \times n$. En effet, c'est un sous-ensemble fermé car une matrice M de $O(n, \mathbb{R})$ peut être définie par l'équation polynomiale $MM^T = I_n$; c'est un sous-ensemble borné car les lignes d'une matrice orthogonale sont des vecteurs unitaires.

Par le lemme précédent, W est un sous-groupe discret du groupe orthogonal. Comme un sous-groupe discret d'un groupe compact est fini, nous avons $W \simeq \sigma(W)$ est fini.

Maintenant, grâce aux graphes et au théorème 1.1, il est possible de reconnaître quels sont ces groupes.

– $(2, 2, 2)$ a comme graphe :



Figure 2.1 Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 2, 2)$

Ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, par la proposition 1.2. Il a 2^3 éléments.

– $(2, 2, x)$, avec $x \geq 3$, a comme graphe :



Figure 2.2 Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 2, x)$

Ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{Z}_2) \times I_x$ qui a $4x$ éléments.

- $(2, 3, 3)$ a comme graphe :



Figure 2.3 Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 3, 3)$

Ce groupe est isomorphe à S_4 qui a $4!$ éléments.

- $(2, 3, 4)$ a comme graphe :

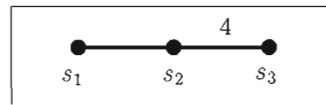


Figure 2.4 Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 3, 4)$

Ce groupe est isomorphe à BC_3 qui a $2(4!)$ éléments : c'est le groupe des permutations signées. Ce sont les isométries du cube qui ne préservent pas nécessairement l'orientation. Ce groupe est aussi appelé le groupe hyperoctaédral.

- $(2, 3, 5)$ a comme graphe :



Figure 2.5 Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 3, 5)$

Ce groupe est isomorphe à H_3 qui a 120 éléments. C'est le groupe des symétries du dodécaèdre.

En conclusion, lorsque B est définie positive, W est bien un groupe fini.

2.2 B dégénérée et W est un groupe de Coxeter affine

Lorsque B est dégénérée nous avons :

$$B = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-T}$$

L'espace nul est donc de dimension 1. Pour tout $v \neq 0$ tel que $Bv = (0, 0, 0)^T$ alors $v \in V^\perp = \{v \in V \mid \mathcal{B}(u, v) = 0 \forall u \in V\}$, l'espace orthogonal de V . V^\perp est aussi de dimension 1.

Donc pour tout $w \in W$ et pour $v \in V^\perp$

$$\sigma(w)(v) = \sigma_1 \dots \sigma_n(v) = \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}(v - \mathcal{B}(e_n, v)e_n) = \sigma_1 \dots \sigma_{n-1}(v) = \dots = v$$

c.-à-d. V^\perp est fixé par $\sigma(w)$ pour tout $w \in W$.

Considérons la représentation canonique duale $\sigma^*(w)$ qui est telle que :

$\sigma^*(w) \circ \lambda = \lambda \circ \sigma(w^{-1})$ ce qui est équivalent à dire que

$$\langle \sigma^*(w)\lambda, \sigma(w)u \rangle = \langle \lambda, u \rangle \forall \lambda \in V^*, u \in V$$

Nous avons donc, $\mathcal{H} = \{\lambda \in V^* \mid \langle \lambda, v \rangle = 0\}$ est aussi fixé, puisque :

$$\begin{aligned} \sigma^*(w)(\mathcal{H}) &= \{\sigma^*(w)(\lambda) \mid \langle \lambda, v \rangle = 0\} \\ &= \{\sigma^*(w)(\lambda) \mid \langle \lambda, \sigma^{-1}(w)(v) \rangle = 0\}, \text{ car } V^\perp \text{ est fixé par tout } \sigma(w) \\ &= \{\sigma^*(w)(\lambda) \mid \langle \sigma^*(w)(\lambda), v \rangle = 0\}, \text{ par définition de } \sigma^* \\ &= \mathcal{H} \end{aligned}$$

Le même raisonnement s'applique pour son translaté :

$$\mathcal{A} = \{\lambda \in V^* \mid \langle \lambda, v \rangle = 1, \}$$

en prenant le même $v \in V^\perp$. Soient a, b, c tels que $v = ae_1 + be_2 + ce_3$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{xe_1^* + ye_2^* + ze_3^* \mid \langle xe_1^* + ye_2^* + ze_3^*, ae_1 + be_2 + ce_3 \rangle = 1\} \\ &= \{xe_1^* + ye_2^* + ze_3^* \mid ax + by + cz = 1\} \end{aligned}$$

Soit $H_i = \{\lambda \in V^* \mid \langle \lambda, e_i \rangle = 0\}$, les murs de la chambre fondamentale.

$H_1 \cap \mathcal{A} = \{ye_2^* + ze_3^* \mid by + cz = 1\}$, c'est une droite affine dans \mathcal{A} . Nous obtenons le même résultat pour $H_2 \cap \mathcal{A}$ et $H_3 \cap \mathcal{A}$.

Après une étude de $\sigma(s)$ sur \mathcal{H} , nous trouvons que chaque $\sigma(s)$ est une réflexion affine, de plus, lorsque W est un groupe irréductible, ces réflexions forment une triangulation du plan.

Exemple 2.1 $(p, q, r) = (3, 3, 3) \Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Nous sommes bien dans le cas où B est dégénérée.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est facile de voir que $v = (1, 1, 1)$ est tel que $V^\perp = \mathbb{R}v$. La figure 2.6 montre la représentation de ce groupe de Coxeter. Le triangle mauve représente la chambre fondamentale.

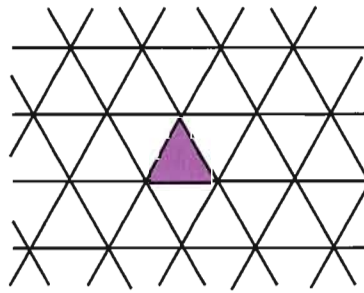


Figure 2.6 Représentation de W avec $(p, q, r) = (3, 3, 3)$

Exemple 2.2 Dans le cas où $(p, q, r) = (2, 4, 4)$. La figure 2.7 montre la représentation de ce groupe.

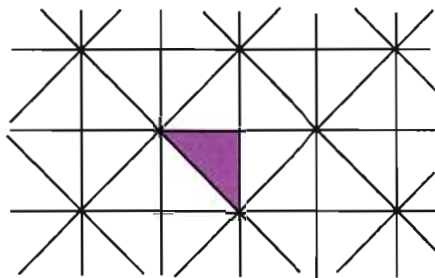


Figure 2.7 Représentation de W avec $(p, q, r) = (2, 4, 4)$

Il est possible de faire la liste des groupes de Coxeter affine de degré 3. Il suffit de trouver tous les $p \leq q \leq r$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$.

– $(2, 2, \infty)$ a comme graphe :

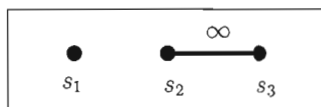


Figure 2.8 Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 2, \infty)$

C'est le seul cas affine pour lequel nous n'avons pas de triangulation du plan. Dans ce cas nous obtenons des droites parallèles dans le plan plutôt que des triangles.

– $(2, 3, 6)$ a comme graphe :

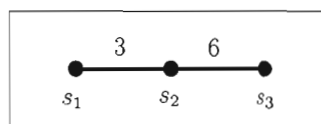


Figure 2.9 Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 3, 6)$

– $(2, 4, 4)$ a comme graphe :

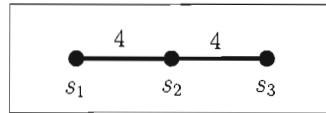


Figure 2.10 Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 4, 4)$

– $(3, 3, 3)$ a comme graphe :

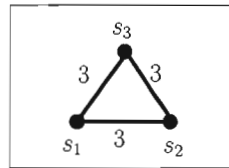


Figure 2.11 Graphe de W avec $(p, q, r) = (3, 3, 3)$

2.3 B de signature $(2,1)$ et W est un groupe de Coxeter hyperbolique

Nous allons nous pencher sur ce cas avec plus de profondeur dans le prochain chapitre.

CHAPITRE III

GROUPES HYPERBOLIQUES DE RANG 3

Dans ce chapitre, nous voyons plusieurs représentations des groupes de Coxeter hyperboliques de rang 3. Dans la première section, nous détaillons la représentation avec le cône de Tits dans \mathbb{R}^3 . Dans la deuxième section, la représentation sera dans l'espace hyperbolique.

3.1 Cône de Tits et l'ensemble Ω

Commençons par décrire la chambre fondamentale et le cône de Tits. Au chapitre 1, la chambre fondamentale a été définie comme suit :

$$C = \{\lambda : V \rightarrow \mathbb{R} \mid \langle \lambda, e_1 \rangle > 0, \langle \lambda, e_2 \rangle > 0, \langle \lambda, e_3 \rangle > 0\}$$

Étant donnée que les groupes de Coxeter hyperboliques sont tels que B est non dégénérée, la proposition 1.4 permet d'identifier V avec V^* par l'isomorphisme $\Lambda : V \rightarrow V^*$. Grâce à Λ , nous identifions C avec son image dans V .

$$C \simeq \{v \in V \mid \mathcal{B}(v, e_i) > 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3\} = \{\lambda = ae_1^* + be_2^* + ce_3^* \mid a, b, c > 0\}$$

Rappelons aussi que le cône de Tits U est l'union des cônes fermés $\sigma(w)D$ obtenus par produit de réflexions $\sigma(w)$ du domaine fondamental D , pour tout w dans W . Nous allons prouver que l'image inverse du cône de Tits par Λ est incluse dans la fermeture de $\Omega = \{v \in V \mid \mathcal{B}(v, v) < 0\}$. À partir de cela, nous allons expliquer la représentation hyperbolique qu'il est possible de faire des groupes de Coxeter hyperboliques.

Considérons $\{f_1, f_2, f_3\}$ tel que

$$\mathcal{B}(e_i, f_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

En posant $f_j = x_{1j}e_1 + x_{2j}e_2 + x_{3j}e_3$, nous obtenons pour f_1 le système d'équations suivant :

$$B \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cela signifie que f_1 est en fait la première colonne de B^{-1} ; des systèmes d'équation équivalent pour f_2 et f_3 , permettent de conclure que f_2 et f_3 sont respectivement les deuxième et troisième colonnes de la matrice inverse de B . De plus, nous pouvons remarquer que $\mathcal{B}(f_i, f_j) = x_{ij}$.

Étant donné que pour un v de V écrit comme combinaison linéaire des f_i , nous avons :

$$\mathcal{B}(v, e_i) = \mathcal{B}(y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3, e_i) = y_1 \mathcal{B}(f_1, e_i) + y_2 \mathcal{B}(f_2, e_i) + y_3 \mathcal{B}(f_3, e_i) = y_i$$

alors C devient :

$$C = \{y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 \mid y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0\}$$

Revenons maintenant à notre ensemble Ω . Nous montrons que C est inclus dans Ω .

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(v, v) &= \mathcal{B}(y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3, y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3) \\ &= y_1^2 \mathcal{B}(f_1, f_1) + y_1 y_2 \mathcal{B}(f_1, f_2) + \cdots + y_3^2 \mathcal{B}(f_3, f_3) \\ &= y_1^2 x_{11} + y_1 y_2 x_{12} + \cdots + y_3^2 x_{33} \end{aligned}$$

Les y_i sont strictement positifs, lorsque $v \in C$. Si nous démontrons que les entrées de la matrice inverse de B sont, lorsque B est la matrice de la forme bilinéaire associé à un groupe de Coxeter hyperbolique, toujours inférieures ou égales à zéro, nous aurons bien que $\mathcal{B}(v, v) < 0$ et que v est dans Ω .

Or, la matrice inverse de B est

$$\frac{1}{\det(B)} \text{Com}(B)^T$$

où $\det(B) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{r}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)$, et $\text{Com}(B)$ est la comatrice de B . Dans la preuve de la proposition 2.1, nous avons prouvé que l'expression décrite par $\det(B)$ est strictement négative pour tout p, q, r , dans le cas où W est un groupe de Coxeter hyperbolique. De plus, les éléments de $\text{Com}(B)$ sont soit de la forme $\sin^2\left(\frac{\pi}{m_i}\right)$; soit de la forme $\cos\left(\frac{\pi}{m_1}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m_2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{m_3}\right)$ où (m_1, m_2, m_3) est une permutation de (p, q, r) . Les éléments de $\text{Cof}(B)$ sont donc tous positifs, et les éléments de B^{-1} sont tous négatifs.

Nous obtenons $C \subset \Omega$ et $D \subset \bar{\Omega} = \{v \in V \mid \mathcal{B}(v, v) \leq 0\}$.

Par la proposition 1.3, $\mathcal{B}(\sigma(w)(x), \sigma(w)(y)) = \mathcal{B}(x, y)$, alors $\sigma(W)$ laisse Ω stable, et $U = \sigma(w)D \subset \bar{\Omega}$.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que lorsque B est de signature $(2, 1)$, nous pouvons trouver une matrice inversible P telle que :

$$B = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-T}$$

Alors,

$$\mathcal{B}(xe_1 + ye_2 + ze_3, xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x, y, z)B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, z)P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

En posant $(x_0, x_1, x_2)^T = P^{-T}(x, y, z)^T$, nous avons :

$$\mathcal{B}(xe_1 + ye_2 + ze_3, xe_1 + ye_2 + ze_3) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$$

Or $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ est l'équation d'un cône, Ω devient :

$$\Omega = \{(x_0, x_1, x_2) \in V \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 < 0\}$$

c.-à-d., Ω est l'ensemble des vecteurs de V situés à l'intérieur du cône.

Comme la fonction $v \mapsto \mathcal{B}(v, v)$ est continue et par ce qui précède, Ω est constitué de deux composantes connexes. Nous notons Ω_+ l'unique composante connexe contenant C ; l'autre composante connexe de Ω est noté Ω_- .

Nous obtenons une partition du cône U par des cônes de la forme $\sigma_w(C)$. La représentation de W consiste à associer à chaque w , un cône $\sigma_w(C)$. Le cône $\sigma_w(C)$ est obtenu après la suite des réflexions sur C par s_n, \dots, s_1 si $w = s_1 \dots s_n$.

Cette représentation en dimension 3 est en bijection avec une représentation en dimension 2, plus pratique. La bijection est exposée dans la prochaine section.

3.2 Représentation de W et plan hyperbolique

Considérons une nappe d'un hyperboloïde définie par

$$\mathcal{M} = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_0 > 0\}$$

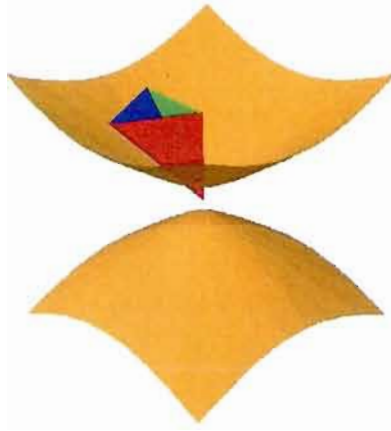


Figure 3.1 Hyperboloïde à deux nappes et C

Cette nappe coupe chacun des cônes $\sigma_w(C)$, auxquels nous avons associé w dans la section précédente, en une zone triangulaire. L'exemple de l'hyperboloïde intersecté par

C est montré à la figure 3.1. Nous pouvons remarquer qu'il y a une bijection entre les cônes $\sigma_w(C)$ et les zones d'intersections des cônes avec l'hyperboloïde. Ainsi, les zones triangulaires obtenues dans \mathcal{M} forment aussi une représentation de W . On appelle \mathcal{M} le modèle de Minkowski du plan hyperbolique.

Partant du modèle de Minkowski, nous passons au disque de Poincaré. Le disque de Poincaré est défini comme suit :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

Il existe une bijection entre ces deux modèles du plan hyperbolique. Nous présentons dans cette section la bijection $\mathcal{I} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$ puis la bijection inverse $\mathcal{J} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$, qui revient à faire la projection du disque \mathcal{D} sur \mathcal{M} . Avant de présenter la bijection nous changeons z en coordonnées polaires hyperboliques. Étant donné un point $z = x+iy \in \mathcal{D}$, nous pouvons lui associer ses coordonnées polaires hyperboliques (r, ϕ) .

$$\tanh\left(\frac{r}{2}\right) = |z|, \quad \tan(\phi) = \frac{y}{x}$$

Ici nous prenons $\frac{r}{2}$ plutôt que r pour simplifier l'écriture dans ce qui suit. Avec ces nouvelles coordonnées, z devient $z(r, \phi) = \tanh\left(\frac{r}{2}\right) (\cos(\phi) + i \sin(\phi))$.

Les coordonnées polaires hyperboliques sont telles que ϕ est la coordonnée polaire usuelle et $r = \ln\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)$. En effet, pour $\tanh(u) = v, u \in \mathbb{R}, v \in [-1, 1]$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} &= v \Rightarrow e^u - e^{-u} = v(e^u + e^{-u}) \Rightarrow e^{2u} - 1 = v(e^{2u} + 1) \\ \Rightarrow e^{2u}(1 - v) &= 1 + v \Rightarrow e^{2u} = \frac{1+v}{1-v} \Rightarrow 2u = \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \\ \Rightarrow u &= \tanh^{-1}(v) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{I} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$$

Étant donné un point $(x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{M}$, nous pouvons lui associer les coordonnées polaires hyperboliques (r, ϕ) .

$$\tanh(r) = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0}, \quad \tan(\phi) = \frac{x_2}{x_1}$$

Ceci est possible car :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0} < 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < x_0, (\text{ car } x_0 > 0) \\ &\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 < x_0^2 \Leftrightarrow -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 < 0 \end{aligned}$$

Comme $(x_0, x_1, x_2) \in \mathcal{M}$, la dernière inégalité est vérifiée.

Définissons \mathcal{I} par $\mathcal{I}(x_0, x_1, x_2) = \tanh\left(\frac{r}{2}\right) (\cos(\phi) + i \sin(\phi))$, où r et ϕ sont obtenus par les égalités décrites plus haut. Décrivons \mathcal{I} plus explicitement.

Quand $u = r$, $\tanh(u) = v \Rightarrow u = \tanh^{-1}(v) = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0}$, alors

$$r = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0}}{1 - \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x_0 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)$$

Calculons maintenant le point $z \in \mathcal{D}$ ayant les coordonnées polaires hyperboliques.

$$\begin{aligned} \tanh\left(\frac{r}{2}\right) &= \frac{e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}}{e^{\frac{r}{2}} + e^{-\frac{r}{2}}} = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} = \frac{\left(\frac{x_0 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^{1/2} - 1}{\left(\frac{x_0 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_0 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^{1/2} + 1} \\ &= \frac{\left(x_0 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{1/2} - \left(x_0 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{1/2}}{\left(x_0 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{1/2} + \left(x_0 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{1/2}} \\ &= \frac{2x_0 - 2\sqrt{x_0^2 - (x_1^2 + x_2^2)}}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ &= \frac{x_0 - 1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{aligned}$$

Puisque $\tan(\phi) = \frac{y}{x}$, $\cos(\phi) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$, et $\sin(\phi) = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$. \mathcal{I} devient :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(x_0, x_1, x_2) &= \frac{x_0 - 1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + i \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \\ &= \frac{x_1(x_0 - 1)}{x_1^2 + x_2^2} + i \frac{x_2(x_0 - 1)}{x_1^2 + x_2^2} \\ &= \frac{x_1(x_0 - 1)}{x_0^2 - 1} + i \frac{x_2(x_0 - 1)}{x_0^2 - 1} \\ &= \frac{x_1}{x_0 + 1} + i \frac{x_2}{x_0 + 1}\end{aligned}$$

$$\mathcal{J} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$$

Définissons \mathcal{J} par :

$$\mathcal{J}(z(r, \phi)) = (\cosh(r), \cos(\phi) \sinh(r), \sin(\phi) \sinh(r))$$

L'image est bien dans \mathcal{M} puisque

$$-\cosh^2(r) + \cos^2(\phi) \sinh^2(r) + \sin^2(\phi) \sinh^2(r) = -\cosh^2(r) + \sinh^2(r) = -1$$

En utilisant le fait que $r = \ln \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)$, nous obtenons

$$\cosh(r) = \frac{e^r + e^{-r}}{2} = \frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2}, \quad \sinh(r) = \frac{e^r - e^{-r}}{2} = \frac{2|z|}{1 - |z|^2}$$

De plus, comme ϕ est la coordonnée polaire usuelle, nous avons :

$$\cos(\phi) = \frac{x}{|z|}, \quad \sin(\phi) = \frac{y}{|z|}$$

Alors,

$$\mathcal{J}(z(r, \phi)) = \left(\frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2}, \frac{x}{|z|} \frac{2|z|}{1 - |z|^2}, \frac{y}{|z|} \frac{2|z|}{1 - |z|^2} \right) = \left(\frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2}, \frac{2x}{1 - |z|^2}, \frac{2y}{1 - |z|^2} \right)$$

De cette description de \mathcal{J} , nous pouvons comprendre \mathcal{J} de manière géométrique. En effet, considérons la projection stéréographique par rapport au point $(-1, 0, 0)$. Les équations

paramétriques de la droite passant par $(-1, 0, 0)$ et $(0, x, y)$ sont :

$$x_0(t) = t - 1$$

$$x_1(t) = xt$$

$$x_2(t) = yt$$

Calculons l'intersection de cette droite avec \mathcal{M} :

$$\begin{aligned} & -(t-1)^2 + (xt)^2 + (yt)^2 = -1 \\ \Rightarrow & -(t-1)^2 + |z|^2 \cos^2(\phi)t^2 + |z|^2 \sin^2(\phi)t^2 + 1 = 0 \\ \Rightarrow & -t^2 + 2t - 1 + |z|^2 t^2 + 1 = 0 \\ \Rightarrow & t^2(|z|^2 - 1) + 2t = 0 \\ \Rightarrow & t = \frac{2}{1 - |z|^2} \end{aligned}$$

En substituant ce t dans les équations paramétriques, nous obtenons l'image de z par \mathcal{J} :

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{2}{1 - |z|^2} - 1 = \frac{1 + |z|^2}{1 - |z|^2}, \\ x_1(t) &= \frac{2x}{1 - |z|^2}, \\ x_2(t) &= \frac{2y}{1 - |z|^2} \end{aligned}$$

Autrement dit, \mathcal{J} est la projection stéréographique de z sur \mathcal{M} à partir du point $(-1, 0, 0)$.

Maintenant que nous avons une bijection entre le modèle de Minkowski et le disque de Poincaré, nous allons regarder ce que devient la représentation des mots de W . Quelle est l'image par \mathcal{I} de l'intersection d'un plan d'équation $ax_0 + bx_1 + cx_2$ avec \mathcal{M} ? Après calcul, nous trouvons que lorsque a est nul, l'image dans le disque de Poincaré est une droite passant par l'origine. Si c est nul, nous obtenons une droite verticale, sinon la pente est $-\frac{b}{c}$.

Si a n'est pas nul, l'image est un cercle de centre $\left(-\frac{b}{a}, -\frac{c}{a}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}}{a}$.
Ce cercle a la propriété d'être perpendiculaire au cercle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

L'image de l'intersection d'un cône $\sigma_w(C)$ avec l'hyperboloïde dans l'espace hyperbolique est donc un triangle ayant des arcs de cercle pour les côtés, ce triangle est dit hyperbolique. Plus précisément, un triangle est dit hyperbolique lorsque la somme de ses angles est inférieure à π .

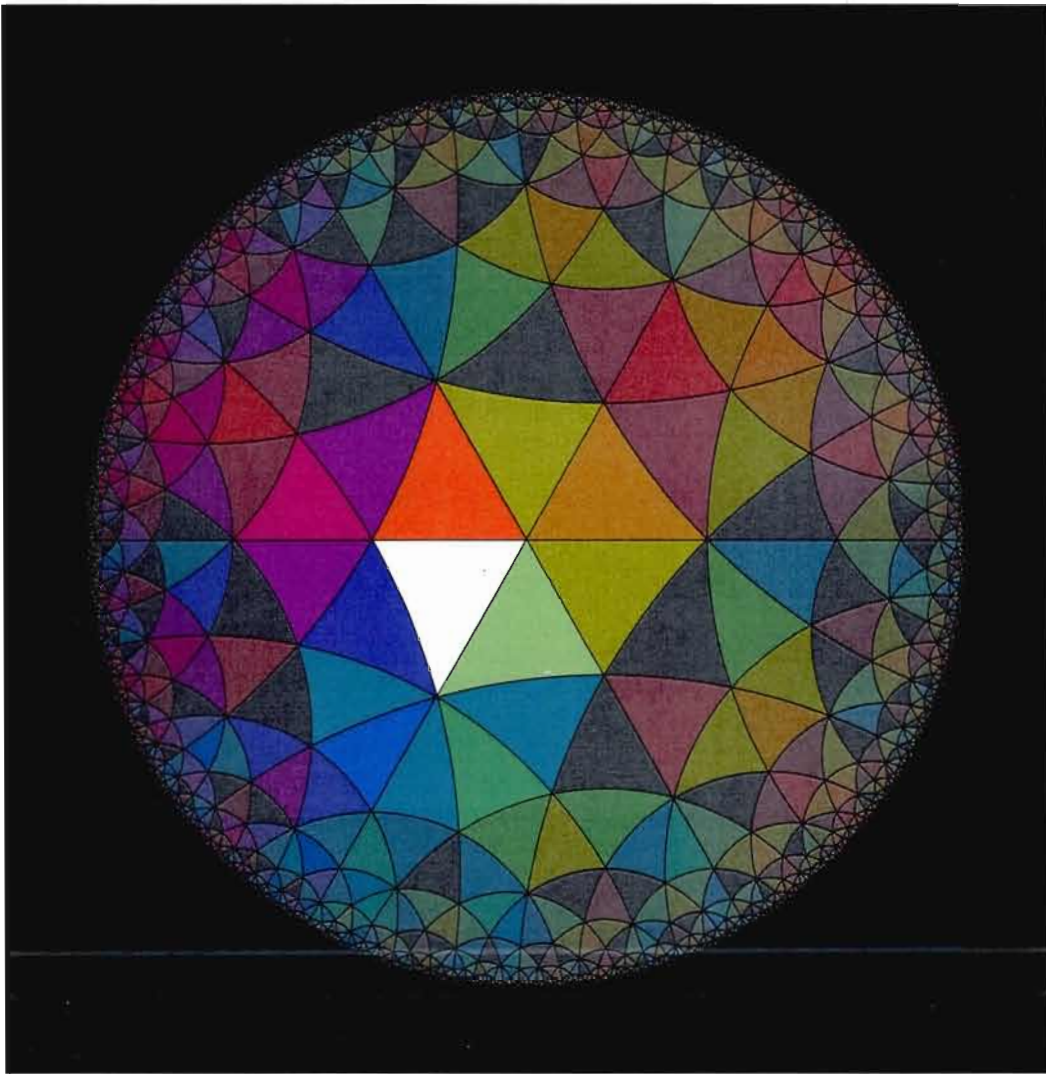


Figure 3.2 Représentation de W avec $(p, q, r) = (3, 3, 4)$ sur le disque de Poincaré

Exemple 3.1 La représentation sur le disque de Poincaré du groupe W avec $(p, q, r) = (3, 3, 4)$ est montré à la figure 3.2.

Sur cette figure le triangle blanc représente l'élément neutre. Les triangles rouge, bleu et vert représentent s_1, s_2 et s_3 . Un mot $w = s_1 \dots s_n$ a une couleur ayant les proportions de rouge, bleu et vert en fonction du nombre de fois que s_1, s_2 et s_3 apparaît dans w . Étant donné que l'écriture d'un élément w n'est pas unique, nous avons choisi le plus petit représentant de la classe des expressions réduites de w , selon l'ordre lexicographique.

En regardant cette figure, nous pouvons retrouver les valeurs de p, q et r car $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ sont les trois angles de chaque triangle.



Avant de clore cette section, nous voudrions mentionner que le disque de Poincaré n'est pas l'unique modèle du plan hyperbolique servant à représenter les groupes de Coxeter hyperboliques de degré 3. En effet, il y a aussi le modèle de Klein et le demi plan supérieur. Ce dernier modèle n'est pas pratique à utiliser car par sa nature il ne permet pas de voir beaucoup d'élément de W . Le modèle de Klein n'est pas conforme c'est-à-dire qu'il ne respecte pas les angles.

3.3 Inversion et réflexion

Dans la section précédente, nous avons montré la bijection entre une nappe d'un hyperboloïde et le disque de rayon 1 centré à l'origine. Nous avons vu que les sections hyperboliques de \mathcal{M} sont envoyés sur les cercles et certaines droites du disque \mathcal{D} .

Dans la présente section, nous définissons la notion d'inversion par rapport à un cercle de \mathcal{D} . Puis, la proposition 3.2 établit l'équivalence entre inversion dans \mathcal{D} et réflexion dans \mathcal{M} .

Exemple 3.2 L'inversion par rapport au cercle \mathcal{C} transforme z en ζ .

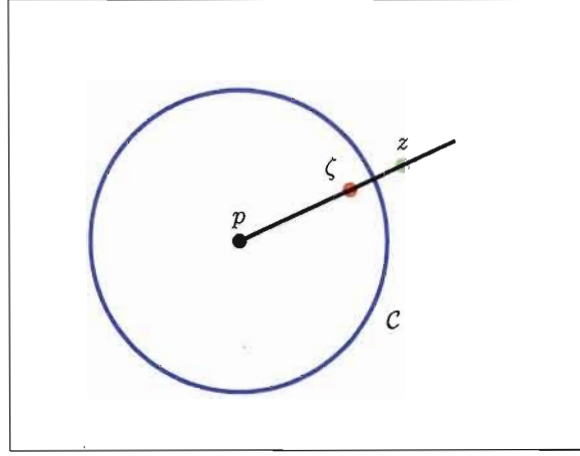


Figure 3.3 Inversion

Voyons la définition formelle de la notion d'inversion, une construction géométrique suivra.

Définition 3.1 Soit C un cercle dans \mathbb{C} d'équation

$$\alpha z \bar{z} + (\beta - i\gamma)z + (\beta + i\gamma)\bar{z} + \alpha = 0, \quad \alpha \neq 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Son centre est alors $p = \left(-\frac{\beta}{\alpha}, -\frac{\gamma}{\alpha} \right)$ et son rayon $r = \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}}{\alpha}$. Une inversion Inv_C par rapport au cercle C est une transformation telle que pour tout z de $\mathbb{C} \setminus \{p\}$, $Inv_C(z) = \zeta$, où ζ est l'unique élément complexe tel que $|z - p||\zeta - p| = r^2$ et qui est situé du même côté de p . En utilisant les propriétés des complexes, nous avons que $\zeta = -\frac{(\beta + i\gamma)\bar{z} + \alpha}{\alpha\bar{z} + \beta - i\gamma}$.

Lorsque $\alpha = 0$, l'équation de C est celle de la droite $\beta x + \gamma y = 0$. Nous obtenons alors $-\frac{(\beta + i\gamma)\bar{z}}{\beta - i\gamma}$ pour ζ .

La construction géométrique de l'inverse d'un point est illustrée par la figure 3.3. Soit C un cercle de centre O . Soit C un point à l'intérieur de C . A est un des points d'intersection entre C et la droite perpendiculaire à OC . Soit B l'intersection entre OC et la tangente du cercle en A .

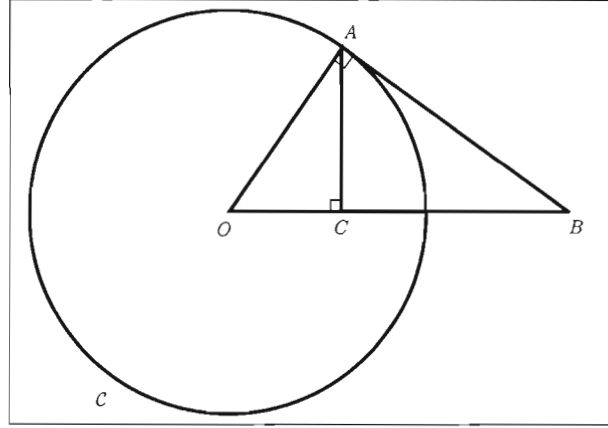


Figure 3.4 Construction de l'inverse de C

Montrons que B est l'inverse de C . Par la construction, les angles \widehat{OCA} et \widehat{OAB} sont droits. De plus, les angles \widehat{AOB} et \widehat{AOC} sont égaux. Alors, nous avons :

$$\widehat{OAC} = 90^\circ - \widehat{AOC} = 90^\circ - \widehat{AOB} = \widehat{OBA}$$

Ainsi, les triangle OAC et OAB sont semblables et nous avons la relation suivante :

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{AO}} \Rightarrow \overline{CO} \overline{BO} = \overline{AO}^2$$

La proposition suivante montre que le disque de Poincaré est préservé par les inversions.

Proposition 3.1 Soit C_0 le cercle délimitant \mathcal{D} .

1. $z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \text{Inv}_C \in \mathcal{D}$
2. $z \in C_0 \Leftrightarrow \text{Inv}_C \in C_0$

Démonstration. Pour $z \in \mathcal{D}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Inv}_C(z) \overline{\text{Inv}_C(z)} &= \frac{(\beta \bar{z} + i\gamma \bar{z} + \alpha)(\beta z - i\gamma z + \alpha)}{(\alpha \bar{z} + \beta - i\gamma)(\alpha z + \beta + i\gamma)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \beta^2 z \bar{z} + \gamma^2 z \bar{z} + \alpha^2 + 2\alpha\beta \bar{z} = \beta^2 + \gamma^2 + \alpha^2 z \bar{z} + 2\alpha\beta \bar{z} \\ &\Leftrightarrow z \bar{z}(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2, \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 \neq 0 \text{ car } r = \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}}{\alpha} \\ &\Leftrightarrow z \bar{z} = 1 \end{aligned}$$

De façon similaire, $z \in \mathcal{C}_0 \Leftrightarrow z\bar{z} < 1 \Leftrightarrow \text{Inv}_{\mathcal{C}}(z)\overline{\text{Inv}_{\mathcal{C}}(z)} < 1$. \square

Le lemme suivant sert à la démonstration de la proposition 3.2. Pour simplifier les notations, nous notons Q la matrice P^{-T} vu au chapitre 2, telle que $B = Q^T \text{diag}(-1, 1, 1)Q$. Pour le cas où $p \neq \infty$, nous avons que $P = P_5 P_4 P_3 P_2 P_1$ et que

$$Q = P^{-T} = P_5^{-T} P_4^{-T} P_3^{-T} P_2^{-T} P_1^{-T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\star} \\ 0 & \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{r}\right) \\ 1 & -\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \\ & & -\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \end{pmatrix}$$

$$\text{où } P_5^{-T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \star = \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\right)^2}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)\right)^2} - \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right).$$

Lemme 3.1

$$\forall w \in W, \forall v \in \mathbb{R}^3, Qv \in \mathcal{M} \Leftrightarrow Q\sigma(w)v \in \mathcal{M}$$

Démonstration. Considérons $\widetilde{\mathcal{M}} = \{v = (a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \mathcal{B}(v, v) = -1, c > 0\}$. Rappelons que $\mathcal{M} = \{x = (x_0, x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_0 > 0\}$. Alors

$$\widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{M}$$

$$v \mapsto Qv$$

est une bijection, puisque Q est une matrice inversible et que la condition $c > 0$ pour $v \in \widetilde{\mathcal{M}}$ est équivalente à $x_0 > 0$ pour $x \in \mathcal{M}$. En effet, pour $x = Qv$ avec $v = (a, b, c)^T$,

nous avons

$$\begin{aligned}
x &= Qv \in \mathcal{M} \\
&\Leftrightarrow -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1, x_0 > 0 \\
&\Leftrightarrow x^T \text{diag}(-1, 1, 1)x = -1, x_0 > 0 \\
&\Leftrightarrow (Qv)^T \text{diag}(-1, 1, 1)Qv = -1, \text{ la première entrée de } Qv > 0 \\
&\Leftrightarrow v^T Q^T \text{diag}(-1, 1, 1)Qv = -1, \sqrt{\star}c > 0 \\
&\Leftrightarrow v^T Bv = -1, c > 0
\end{aligned}$$

Alors $v \in \widetilde{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \sigma(w)v \in \widetilde{\mathcal{M}}$, puisque B est $\sigma(W)$ -invariant par la proposition 1.3.

Par la bijection entre $\widetilde{\mathcal{M}}$ et \mathcal{M} , $Qv \in \mathcal{M} \Leftrightarrow Q\sigma(w)v \in \mathcal{M}$. □

Proposition 3.2

$$\forall v \in \widetilde{\mathcal{M}}, \forall w = s_1 \dots s_n \in W : \mathcal{I}(Q\sigma(w)v) = \text{Inv}_{\mathcal{C}_1} \text{Inv}_{\mathcal{C}_2} \dots \text{Inv}_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{I}(Qv))$$

où \mathcal{C}_i est l'image de $Q(H_i) \cap \widetilde{\mathcal{M}}$ sous \mathcal{I} .

Démonstration. Premièrement, nous remarquons qu'il suffit de montrer cette formule pour $w = s \in S$, c.-à-d.

$$\mathcal{I}(Q\sigma_s v) = \text{Inv}_{\mathcal{C}_s}(\mathcal{I}(Qv)) \quad (\diamond)$$

où \mathcal{C}_s est le cercle correspondant à $Q(H_s) \cap \widetilde{\mathcal{M}}$.

En effet, en supposant l'équation (\diamond) vraie, nous avons

$$\mathcal{I}(Q\sigma(w)v) = \mathcal{I}(Q\sigma(s_1)\sigma(s_2) \dots \sigma(s_n)v), \forall w = s_1 \dots s_n \in W$$

et par hypothèse de récurrence, $\sigma(s_i) \dots \sigma(s_n)v \in \widetilde{\mathcal{M}}$ pour $i = 2, \dots, n$, ainsi,

$$\mathcal{I}(Q\sigma(s_1) \dots \sigma(s_n)v) = \text{Inv}_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{I}(Q\sigma(s_2) \dots \sigma(s_n)v)) = \dots = \text{Inv}_{\mathcal{C}_1} \text{Inv}_{\mathcal{C}_2} \dots \text{Inv}_{\mathcal{C}_n}(\mathcal{I}(Qv))$$

Maintenant, nous montrons (\diamond) pour s_1, s_2 , et s_3 .

Soit $v = (a, b, c)^T \in \widetilde{\mathcal{M}}$, c.-à-d. $Qv = (x_0, x_1, x_2)^T \in \mathcal{M}$ avec $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1$.

Pour $w = s_1$, nous obtenons,

$$Q\sigma_{s_1}v = Q \begin{pmatrix} -1 & 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) & 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

Donc, $\mathcal{I}(Q\sigma_{s_1}v) = \left(\frac{x_1}{x_0+1}, -\frac{x_2}{x_0+1}\right)$. De l'autre côté, l'hyperplan H_1 est tel que

$$(1, 0, 0)B(x, y, z)^T = 0 \Leftrightarrow (1, 0, 0)Q^T(-x_0, x_1, x_2)^T = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Alors, nous obtenons les valeurs suivantes pour la formule de l'inversion par rapport à H_1 : $\alpha, \beta = 0$ et $\gamma = 1$.

$$Inv_{H_1}(\mathcal{I}(Qv)) = Inv_{H_1}\left(\frac{x_1}{x_0+1}, \frac{x_2}{x_0+1}\right) = -\frac{i\left(\frac{x_1}{x_0+1} - i\frac{x_2}{x_0+1}\right)}{-i} = \mathcal{I}(Q\sigma_{s_1}v)$$

Pour $w = s_2$, nous obtenons,

$$Q\sigma_{s_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{\star} \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) & 2\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \\ 1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{p}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(Q\sigma_{s_2}(v)) &= -\frac{1}{1+c\sqrt{\star}} \times \\ &\left(-2a\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) - 2c\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) + \frac{c\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + c\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \right) \\ &- \frac{i}{1+c\sqrt{\star}} \left(-a + 2a\cos^2\left(\frac{\pi}{p}\right) - b\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) + c\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right) \right) \end{aligned}$$

De l'autre côté, l'hyperplan H_2 est défini par :

$$(0, 1, 0)B(x, y, z)^T = 0 \Leftrightarrow (0, 1, 0)Q^T(-x_0, x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{p}\right)x_1 - \cos\left(\frac{\pi}{p}\right)x_2 = 0$$

Donc $\alpha = 0, \beta = \sin\left(\frac{\pi}{p}\right), \gamma = -\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)$.

$$Inv_{H_2}(\mathcal{I}(Qv)) = -\frac{(\beta + i\gamma)\bar{z}}{\beta - i\gamma}$$

En faisant les calculs, nous obtenons bien que $\mathcal{I}(Q\sigma_{s_2}(v)) = Inv_{H_2}(\mathcal{I}(Qv))$.

Pour $w = s_3$, nous obtenons pour $Q\sigma_{s_3}$

$$\begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\sqrt{\star} & 2\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\sqrt{\star} & -\sqrt{\star} \\ -2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\heartsuit & \sin\left(\frac{\pi}{p}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\heartsuit & \heartsuit \\ 1 - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) & -\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \end{pmatrix}$$

où, $\heartsuit = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{r}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$. Donc $\mathcal{I}(Q\sigma_{s_3}(v))$ vaut

$$\begin{aligned} & \frac{-2a\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\heartsuit + b\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) - 2b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\heartsuit + c\heartsuit}{2a\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\sqrt{\star} + 2b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\sqrt{\star} - c\sqrt{\star} + 1} \\ & + i \frac{a - 2a\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - b\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) - 2b\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\cos\left(\frac{\pi}{r}\right) + c\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)}{2a\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\sqrt{\star} + 2b\cos\left(\frac{\pi}{r}\right)\sqrt{\star} - c\sqrt{\star} + 1} \end{aligned}$$

De l'autre côté, l'hyperplan H_3 est défini par :

$$(0, 0, 1)B(x, y, z)^T = 0 \Leftrightarrow (0, 0, 1)Q^T(-x_0, x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\star}x_0 + \heartsuit x_1 + \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)x_2 = 0$$

Donc $\alpha = \sqrt{\star}, \beta = \heartsuit, \gamma = \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$.

$$Inv_{H_3}(\mathcal{I}(Qv)) = -\frac{(\beta + i\gamma)\bar{z} + \alpha}{\alpha\bar{z} + \beta - i\gamma}$$

Après de longs calculs, nous obtenons le résultat prévu. Cela termine la démonstration.

□

3.4 Nombre d'éléments par longueur

Dans le cas des groupes de Coxeter affines et finis, il existe des formules génératrices de la longueur des mots. Il serait intéressant d'en trouver pour le cas des groupes de Coxeter hyperboliques.

Dans le cas où $(p, q, r) = (3, 3, 4)$, nous obtenons les données du tableau 3.1.

Ni l'inverseur de Plouffe, ni "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences" de (Sloane, 2009) n'a donné de résultat pour ces nombres.

Tableau 3.1 Nombre d'éléments par longueur

l	Nb. d'élément de longueur l	Nb. d'élément de longueur $\leq l$
0	1	1
1	3	4
2	6	10
3	10	20
4	15	35
5	22	57
6	31	88
7	44	132
8	62	194
9	87	281
10	122	403
11	171	574
12	240	814
13	336	1150
14	471	1621
15	660	2281
16	925	3206
17	1296	4502
18	1816	6318
19	2545	8863
20	3566	12429

CHAPITRE IV

CLASSIFICATION DES GROUPES DE COXETER HYPERBOLIQUES

Dans ce chapitre, nous allons présenter la classification des groupes de Coxeter hyperboliques irréductibles, basée sur celle de (Koszul, 1967) et de (Bourbaki, 1981). Cette classification dépend de la classification des groupes de Coxeter finis et affines exposées aux théorèmes 1.1 et 1.2 ainsi qu'à la notion de compacité.

Au deuxième chapitre, nous avons prouvé qu'un groupe de rang 3 est fini si B est définie positive; affine, si B est dégénérée; et hyperbolique, si B est de signature $(2, 1)$. Pour généraliser cette classification aux groupes de rang n , il faut ajouter certaines conditions. Nous utiliserons le fait qu'un groupe de Coxeter de rang n est fini si et seulement si B est définie positive et la définition d'un groupe hyperbolique suivante :

Définition 4.1 *Un groupe de Coxeter W de rang n est dit hyperbolique si B est de signature $(n - 1, 1)$ et si $\mathcal{B}(x, x) < 0$ pour tout $x \in C$.*

Nous supposons pour la suite que le groupe W est un groupe hyperbolique de rang n , ainsi B est non-dégénérée. Par la proposition 1.4, il est alors possible d'identifier V et V^* . Dans ce contexte, \mathcal{B} peut être considérée comme une forme bilinéaire sur V^* ; en posant $\mathcal{B}(v_1^*, v_2^*) = \mathcal{B}(\Lambda^{-1}v_1^*, \Lambda^{-1}v_2^*)$, où $\Lambda : V \rightarrow V^*$ est l'isomorphisme décrit à la proposition 1.4. Pour alléger les notations, nous écrirons dorénavant w pour faire référence à $\sigma(w)$.

De plus, par le lemme 2.1, nous pouvons considérer W comme un sous-groupe discret

du groupe orthogonal $O(B)$, défini de la manière suivante :

$$O(B) = \{g \in \text{End}(V^*) \mid B(g(x), g(y)) = B(x, y) \ \forall x, y \in V^*\}$$

Comme au chapitre précédent, nous notons $\Omega = \{x \in V^* \mid B(x, x) < 0\}$. Puisque W est un groupe hyperbolique, B est de signature $(n-1, 1)$; Ω a alors deux composantes connexes. De plus, la chambre fondamentale C est connexe et incluse dans Ω . Nous notons Ω_+ la composante connexe de Ω contenant C et Ω_- l'autre composante connexe. Nous allons montrer que l'action de W laisse Ω_+ et Ω_- invariants.

Nous avons $H_s \cap \Omega_+ \neq \emptyset$ où $H_s = \{x \in V^* \mid B(x, \lambda_s) = 0\}$. En effet, H_s est un mur de $C \subset \Omega_+$. Rappelons que λ_s est l'élément de V^* identifié à l'élément e_s de V , par la proposition 1.4. Ainsi $B(\lambda_s, \lambda_s) = B(e_s, e_s) = 1$ et $\lambda_s \notin \Omega$.

Il existe alors $x \in \Omega$ tel que $B(x, \lambda_s) = 0$, et x est tel que $\sigma_s(x) = x$. C.-à-d. $\sigma_s(\Omega)$ a un point fixe. D'autre part, $\sigma(W)$ laisse B et Ω invariants par la proposition 1.3, nous avons donc soit $\sigma_s(\Omega_\pm) = \Omega_\pm$, soit $\sigma_s(\Omega_\pm) = \Omega_\mp$. Mais puisque σ_s a un point fixe, $\sigma_s(\Omega_+) = \Omega_+$, c'est-à-dire l'action de W laisse Ω_+ invariant; il en est de même pour Ω_- .

Le théorème suivant est central dans la classification des groupes hyperboliques. En effet, il nous garantit que nous pouvons nous baser sur la liste des groupes de Coxeter irréductibles finis et affines pour trouver tous les groupes de Coxeter hyperboliques.

Théorème 4.1 *Un groupe de Coxeter irréductible est hyperbolique si et seulement si*

- (a) $\forall r \in S$, la matrice $\left(-\cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right) \right)_{s,t \in S \setminus \{r\}}$ est positive.
- (b) B n'est ni dégénérée, ni définie positive.

Démonstration. (\Rightarrow) Comme W est un groupe de Coxeter hyperbolique, alors B est de signature $(n-1, 1)$, donc B est ni dégénérée, ni définie positive. (b) est prouvé.

Comme $C \subset \Omega$, nous avons $B(x, x) < 0 \ \forall x \in C = \{x \in V^* \mid \langle e_s, x \rangle > 0 \ \forall s \in S\}$. Tout élément e_s^* de la base duale de $\{e_s\}$ est tel que $e_s^* \in \bar{C}$, donc $B(e_s^*, e_s^*) \leq 0 \ \forall s \in S$.

Posons $L_s = \{x \in V^* \mid B(e_s^*, x) = 0\}$. Nous avons $B(e_s^*, \lambda_t) = \langle e_s^*, e_t \rangle = 0 \ \forall t \neq s$.

Ainsi, $\lambda_t \in L_s \forall t \neq s$ et $\lambda_s \notin L_s$, donc L_s est un sous-espace de dimension $n - 1$. Comme $\mathcal{B}(e_s^*, \lambda_t) = 0 \forall t \neq s$, L_s est orthogonal à e_s^* ; d'autre part, $\mathcal{B}(e_s^*, e_s^*) \leq 0$ donc B est négative sur l'espace engendré par e_s^* . Et, puisque B est de signature $(n - 1, 1)$, le théorème 2.1 implique que B est positive sur L_s . La matrice de la restriction de B sur L_s est exactement celle décrite en (a), et elle est bien positive.

(\Leftarrow) Par (b), B n'est ni définie positive ni dégénérée, il existe donc $x \in V^*$ tel que $\mathcal{B}(x, x) < 0$. Posons $x = \sum_{s \in S} a_s \lambda_s$ et définissons

$$x_+ = \sum_{a_s > 0} a_s \lambda_s, \text{ et } x_- = \sum_{a_s < 0} a_s \lambda_s$$

Puisque $\mathcal{B}(\lambda_s, \lambda_t) = \mathcal{B}(e_s, e_t) = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right) \leq 0, \forall s, t \in S, s \neq t$, nous avons

$$\mathcal{B}(x_+, x_-) = \mathcal{B}\left(\sum_{a_s > 0} a_s \lambda_s, \sum_{a_t < 0} a_t \lambda_t\right) = \sum_{a_s > 0} a_s \sum_{a_t < 0} a_t \mathcal{B}(\lambda_s, \lambda_t) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } 0 > \mathcal{B}(x, x) &= \mathcal{B}(x_+ + x_-, x_+ + x_-) \\ &= \mathcal{B}(x_+, x_+) + 2\mathcal{B}(x_+, x_-) + \mathcal{B}(x_-, x_-) \\ &\geq \mathcal{B}(x_+, x_+) + \mathcal{B}(x_-, x_-) \end{aligned}$$

Nous pouvons supposer que $\mathcal{B}(x_+, x_+) < 0$. En effet, si ce n'est pas le cas nous intervenons x_+ et x_- . Alors, $x_+ - x_- \in \Omega \cap \sum_{s \in S} \mathbb{R}_+ \lambda_s$; où \mathbb{R}_+ désigne les réels strictement positifs.

Notons Ω_0 , l'ensemble connexe de Ω , tel que $\Omega_0 \cap \sum_{s \in S} \mathbb{R}_+ \lambda_s \neq \emptyset$.

Par (a), $\forall s \in S, \forall x \in L_s, \mathcal{B}(x, x) \geq 0$ ainsi, $\Omega_0 \cap L_s = \emptyset, \forall s \in S$.

De plus, puisque $\forall s, t \in S, s \neq t, \mathcal{B}(e_s^*, \lambda_t) = 0$ alors $\lambda_t \in L_s \forall t \neq s$.

Donc, L_s est à la frontière de $\sum_{s \in S} \mathbb{R}_+ \lambda_s$ pour tout $s \in S$. Or, $\Omega_0 \cap L_s = \emptyset, \forall s \in S$ et Ω_0 est connexe, alors $\Omega_0 \subset \sum_{s \in S} \mathbb{R}_+ \lambda_s$.

À partir de ce résultat, nous montrons que B est de signature $(n - 1, 1)$.

Soient $x \in \Omega$ et $y \in \Omega_0$. Par contradiction, supposons qu'il existe un sous-espace de dimension 2, disons $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y$, sur lequel B est définie négative. Alors le sous-espace est dans une des deux composantes connexes de Ω . Comme $y \in \Omega_0$, $(\mathbb{R}x + \mathbb{R}y) \setminus \{0\} \subset \Omega_0$. Ceci mène à une contradiction puisque $\Omega_0 \subset \sum_{s \in S} \mathbb{R}_+ \lambda_s$. Donc il n'existe pas de sous-espace de dimension 2 sur lequel B est définie négative. Par ceci et par (b), B est de signature $(n - 1, 1)$.

Il reste à montrer que $\forall x \in C, \mathcal{B}(x, x) < 0$.

Comme B est de signature $(n - 1, 1)$, B est positive sur L_s . e_s^* est orthogonal à L_s , alors $\mathcal{B}(e_s^*, e_s^*) \leq 0$. Cela implique que $e_s^* \in \bar{\Omega} \forall s \in S$. Or, e_s^* est à la frontière de C , d'où $\bar{C} \subset \bar{\Omega}$ et finalement $C \subset \Omega$. \square

Le théorème 4.1, est suffisant pour construire tous les groupes hyperboliques irréductibles, et ainsi établir la classification voulue. Par contre il est possible de raffiner cette classification et de séparer tous les groupes hyperboliques en deux classes : les groupes compacts et les groupes non-compacts.

La définition de groupe hyperbolique compact est la suivante :

Définition 4.2 *Un groupe de Coxeter hyperbolique est dit compact si le groupe quotient $W \setminus O(B)$ est compact.*

Remarquons que les groupes de Coxeter irréductibles finis et affines sont toujours compacts, donc la notion de compacité pour ces groupes est inutile. Dans la littérature, un groupe est dit compact seulement lorsqu'il est hyperbolique.

Parmi les groupes hyperboliques, certains seront tels que pour tout $r \in S$, la matrice décrite au théorème 4.1 (a) est définie positive. Cela signifie que le graphe d'un tel groupe sera tel que si nous ôtons un sommet quelconque, alors nous obtenons le graphe d'un groupe fini. Pour les autres, la matrice sera parfois dégénérée et il sera alors possible

d'obtenir le graphe d'un groupe affine en ôtant un des sommets. Nous allons montrer que cette distinction est équivalente à être ou ne pas être compact.

Nous allons auparavant exposer une série de lemmes qui ont pour but de montrer que $\Omega_+ = \text{Int}(U)$, où U est le cône de Tits.

Définition 4.3 *Nous définissons q , la projection canonique de $V^* \setminus \{0\}$ dans l'espace projectif PV^* .*

$$q : V^* \setminus \{0\} \rightarrow PV^*$$

Lemme 4.1 *$O(\mathcal{B})$ agit proprement sur $q(\Omega_+)$.*

Démonstration. Soit $H_x = \{y \in V^* \mid \mathcal{B}(x, y) = 0\}$. Soit B_x , la forme bilinéaire B restreinte à H_x . Puisque B est de signature $(n-1, 1)$, B_x est définie positive $\forall x \in \Omega_+$. En effet, pour $x \in \Omega_+$, nous avons que $x \notin H_x$ car $\mathcal{B}(x, x) < 0$. Alors B_x est définie positive. Le groupe orthogonal restreint à H_x est

$$\begin{aligned} O(B_x) &= \{g \in \text{End}(V^*) \mid \mathcal{B}_x(g(y), g(z)) = \mathcal{B}_x(y, z) \forall y, z \in V^*\} \\ &= \{g \in O(\mathcal{B}) \mid g(y) \in H_x \forall y \in H_x\} \end{aligned}$$

Le stabilisateur de x est défini par $\text{Stab}_x = \{g \in O(\mathcal{B}) \mid gx = \mathbb{R}x\}$. Il est inclu dans $O(B_x)$ car $\forall g \in \text{Stab}_x$ et $y \in H_x$. Nous avons

$$0 = \mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(gx, gy) = \mathcal{B}(\mathbb{R}x, gy) \Rightarrow \mathcal{B}(x, gy) = 0$$

Et comme B_x est définie positive, $O(B_x)$ et Stab_x sont compacts.

Si $O(\mathcal{B})$ n'agissait pas proprement sur $q(\Omega_+)$, cela voudrait dire que l'application suivante ne serait pas propre

$$(g, x) \mapsto (gx, x) \text{ pour } g \in O(\mathcal{B}) \text{ et } x \in q(\Omega_+)$$

Ainsi, il existerait un sous-ensemble $A = \{(gx, x) \mid g \in O(\mathcal{B}), x \in q(\Omega_+)\}$ compact tel que sa pré-image $\{(g, x) \mid g \in O(\mathcal{B}), x \in q(\Omega_+)\}$ ne serait pas compacte.

Donc pour un g' fixé et pour x tel que $(g'x, x) \in A$, il existe un nombre infini de g tel que $g'x = gx$. Ainsi il existe un nombre infini de g tel que $g'^{-1}gx = x$, ce qui est impossible puisque $Stab_x$ est compact.

Donc $O(\mathcal{B})$ agit proprement sur $q(\Omega_+)$.

Lemme 4.2 Ω_+ est contenu dans le cône simplicial généré par $\{-\lambda_s\}_{s \in S}$

c.-à-d. si $x = \sum_{s \in S} \alpha_s \lambda_s \in \Omega_+$ alors $\alpha_s \leq 0 \ \forall \ s \in S$.

Démonstration. Rappelons que $\{e_s^*\}_{s \in S}$ est la base duale de $\{\lambda_s\}_{s \in S}$. Alors, $e_s^* \in \bar{C}$. De plus,

$$\mathcal{B}(x, e_s^*) = \mathcal{B}\left(\sum_{t \in S} \alpha_t \lambda_t, e_s^*\right) = \sum_{t \in S} \alpha_t \mathcal{B}(\lambda_t, e_s^*) = \alpha_s$$

D'une part, $x \in \Omega_+$ et d'autre part, $e_s^* \in \bar{C} \subset \bar{\Omega}_+$. Alors, x et e_s^* sont dans la fermeture de la même composante connexe et $\mathcal{B}(x, e_s^*) \leq 0$.

En effet, supposons que $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ soient deux éléments de Ω_+ tel que $\mathcal{B}(x, y) > 0$ alors,

$$x^T B y = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = -1 + \frac{x_2 y_2}{x_1 y_1} + \dots + \frac{x_n y_n}{x_1 y_1} = -1 + x' \cdot y' > 0$$

Où \cdot dénote le produit scalaire usuel. Comme $\mathcal{B}(x, x) < 0$ et $\mathcal{B}(y, y) < 0$, nous avons que $x' = \left(\frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)$ et $y' = \left(\frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}\right)$ sont tels que $|x'| < 1$ et $|y'| < 1$. Puisque $x' \cdot y' = |x'| |y'| \cos(\theta)$, il est impossible d'avoir $-1 + x' \cdot y' > 0$.

Lemme 4.3 Soit f la forme linéaire sur V^* telle que $f(\lambda_s) = 1 \ \forall s \in S$. Alors,

$$\exists w_x \in W \text{ t.q. } f(w_x x) \geq f(w x) \ \forall w \in W$$

Démonstration. Soit $\Phi : \Omega_+ \rightarrow]-\infty, 0]$, la fonction définie par

$$\Phi(y) = \frac{f(y)^2}{\mathcal{B}(y, y)}$$

Puisque f est linéaire et \mathcal{B} est bilinéaire, Φ est homogène. En effet,

$$\Phi(cy) = \frac{f(cy)^2}{\mathcal{B}(cy, cy)} = \frac{c^2 f(y)^2}{c^2 \mathcal{B}(y, y)} = \Phi(y) \quad \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Alors, il existe une fonction $\phi : q(\Omega_+) \rightarrow]-\infty, 0]$ telle que $\Phi = \phi \circ q$.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\Phi} & \Phi(x) \\ q \downarrow & \nearrow \phi & \\ \mathbb{R}x & & \end{array}$$

Nous allons montrer que ϕ est une fonction propre.

Puisque B est de signature $(n-1, 1)$, il existe une transformation linéaire inversible

$A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$x \cdot x = -y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 \text{ où } x = Ay, x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \text{ et } y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Donc, $\Phi(x) = \frac{(a_0 y_0 + \cdots + a_{n-1} y_{n-1})^2}{-y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2}$. De plus,

$$x \in \Omega_+ \Leftrightarrow -y_0^2 + y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 < 0$$

$$\phi(y) = \frac{(a_0 + a_1 y_1/y_0 + \cdots + a_{n-1} y_{n-1}/y_0)^2}{-1 + (y_1/y_0)^2 + \cdots + (y_{n-1}/y_0)^2} = \frac{(a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_{n-1} z_{n-1})^2}{-1 + z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2}$$

où $B_0^{n-1} = \{z = (z_1, \dots, z_{n-1}) \mid z_1^2 + \cdots + z_{n-1}^2 < 1\} \simeq P\Omega_+$.

La fonction ϕ est continue car, avec ces coordonnées, est s'écrit comme le quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. Puisque ϕ est une fonction continue, alors pour tout ensemble fermé $K \subset]-\infty, 0]$, $\phi^{-1}(K)$ est un ensemble fermé. Et, puisque B_0^{n-1} est un ensemble borné, pour tout ensemble borné $K \subset]-\infty, 0]$, $\phi^{-1}(K)$ est un ensemble borné. Donc, ϕ est une fonction propre.

Comme ϕ est propre, l'ensemble $A = \{ \xi \in q(\Omega_+) \mid \phi(\xi) \geq M \}$ est compact pour tout $M \in]-\infty, 0]$.

Le lemme 4.1 prouve que $O(\mathcal{B})$ agit proprement sur $q(\Omega_+)$ et nous avons déjà vu que W est discret dans $O(\mathcal{B})$. Alors, il existe un nombre fini de $w \in W$ tel que $wq(x) \cap L \neq \emptyset$, pour un ensemble compact L . Cela signifie que $Wq(x)$ est discret. En particulier, le sous-ensemble compact $A \cap Wq(x)$ est fini.

Il existe donc un élément $\xi = w_x q(x)$ pour lequel ϕ soit maximal, c'est-à-dire qu'il existe w_x tel que $\phi(w_x q(x)) \geq \phi(wq(x)) \forall w \in W$.

Les inégalités suivantes terminent la preuve.

$$\begin{aligned} \Phi(w_x x) &= \phi(w_x q(x)) \geq \phi(wq(x)) = \Phi(wx) \quad \forall w \in W \\ \Rightarrow \frac{f(w_x x)^2}{\mathcal{B}(w_x x, w_x x)} &\geq \frac{f(wx)^2}{\mathcal{B}(wx, wx)} \quad \forall w \in W \\ \Rightarrow f(w_x x)^2 &\leq f(wx)^2, \quad \text{car } \mathcal{B}(y, y) < 0 \quad \forall y \in \Omega_+ \\ \Rightarrow f(w_x x) &\geq f(wx) \quad \forall w \in W, \quad \text{car } f(y) \leq 0 \quad \forall y \in \Omega_+ \end{aligned}$$

En effet, par le lemme 4.2,

$$f(y) = f\left(\sum_{s \in S} \alpha_s \lambda_s\right) = \sum_{s \in S} \alpha_s f(\lambda_s) = \sum_{s \in S} \alpha_s \leq 0 \quad \forall y \in \Omega_+$$

Lemme 4.4 $Wx \cap \bar{C} \neq \emptyset, \quad \forall x \in \Omega_+.$

Démonstration. Soit f la forme linéaire sur V^* décrite dans la preuve du lemme 4.3.

Pour $x \in \Omega_+$, posons $w_x \in W$ un élément tel que $f(w_x x) \geq f(wx) \quad \forall w \in W$. Il existe un tel élément par le lemme 4.3.

Nous allons montrer que $w_x x \in \bar{C}$.

Posons $w_x x = \sum_{s \in S} \mu_s e_s^*$.

Si $\mu_s \geq 0 \quad \forall s \in S$, alors nous avons ce que nous voulons, puisque, pour tout $s \in S$, nous avons :

$$\langle w_x x, e_s \rangle = \left\langle \sum_{t \in S} \mu_t e_t^*, e_s \right\rangle = \sum_{t \in S} \mu_t \langle e_t^*, e_s \rangle = \mu_s \geq 0$$

Pour tout $s \in S$, de l'hypothèse sur w_x il découle l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
 0 &\geq f(sw_x x) - f(w_x x) = f(sw_x x - w_x x) \\
 &= f(w_x x - 2 \langle w_x x, e_s \rangle \lambda_s - w_x x) \\
 &= f(-2 \langle w_x x, e_s \rangle \lambda_s) = -2f(\mu_s \lambda_s) \\
 &= -2\mu_s
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_s \geq 0$, $\forall s \in S$, et $w_x x \in \bar{C}$. □

Lemme 4.5 $\Omega_+ = \text{int}(U)$.

Démonstration. ⊂

$\text{Int}(U) \subset U, C \subset \Omega_+$ et $W\Omega_+ = \Omega_+$; alors nous avons

$$\text{Int}(U) \subset U = W\bar{C} \subset W\bar{\Omega}_+ = \bar{\Omega}_+ \Rightarrow \text{Int}(U) \subset \Omega_+$$

⊃

Par le lemme 4.4, $Wx \cap \bar{C} \neq \emptyset \forall x \in \Omega_+$.

Donc, $\{x\} \cap W\bar{C} \neq \emptyset \forall x \in \Omega_+$.

Finalement, $\Omega_+ \subset W\bar{C} = U$.

Puisque $\text{Int}(U) \subset \Omega_+ \subset U$ et que Ω_+ est un ensemble ouvert, alors $\Omega_+ = \text{Int}(U)$. □

Avec l'égalité entre $\text{Int}(U)$ et Ω_+ , la prochaine proposition nous donne deux critères équivalents pour qu'un groupe hyperbolique soit compact.

Proposition 4.1 *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *L'espace quotient $W \setminus q(\text{int}(U))$ est compact*
- (b) *pour tout $X \subsetneq S$, W_X est fini, où W_X est le sous-groupe engendré par X*
- (c) $\bar{C} \subset \text{Int}(U)$

Le théorème 4.2 prouve ce que nous avons énoncé précédemment.

Théorème 4.2 *Un groupe de Coxeter hyperbolique est compact si et seulement si les deux conditions suivantes sont vraies*

- (a) $\forall r \in S, \left(-\cos \begin{pmatrix} \pi \\ m_{s,t} \end{pmatrix} \right)_{s,t \in S \setminus \{r\}}$ est définie positive
 (b) B est non dégénérée et non positive.

Démonstration. Par définition, W est compact si et seulement si $W \setminus O(\mathcal{B})$ est compact. Par le lemme 4.1 et le lemme 4.5, $O(\mathcal{B})$ agit proprement sur $q(Int(U))$, ainsi W est compact si et seulement si $W \setminus q(Int(U))$ l'est. En effet, en considérant l'action propre et continue $Wq \mapsto Wgq$ avec $q \in q(Int(U))$ et $g \in O(\mathcal{B})$, nous avons que l'ensemble $\{Wq \mid q \in q(Int(U))\}$ est compact si et seulement si $\{Wgq \mid q \in q(Int(U)), g \in O(\mathcal{B})\}$ l'est.

(\Rightarrow) Puisque W est compact, $W \setminus q(Int(U))$ l'est aussi. Par la proposition 4.1,

$\forall X \subsetneq S, W_X$ est fini, donc $\forall r \in S, B_{e_r}$ est définie positive. Donc, (a) est vrai.

Et puisque W est un groupe de Coxeter hyperbolique, B est de signature $(n-1, 1)$, (b) est prouvé.

(\Leftarrow) (a) implique le (a) du théorème 4.1 et (b) implique le (b) du théorème 4.1. Donc, par le théorème 4.1, W est un groupe hyperbolique.

Supposons que $\bar{C} \not\subseteq \Omega_+$, alors il existe e_s^* tel que $\mathcal{B}(e_s^*, e_s^*) = 0$.

Considérons $H_{\lambda_t} = \{x \in V^* \mid \mathcal{B}(x, \lambda_t) = 0\}$. Alors, $e_s^* \in H_{\lambda_t}$ et B_{λ_t} est définie positive par (a). Or, $\mathcal{B}_{\lambda_t}(e_s^*, e_s^*) = 0$; ce qui contredit le fait que B_{λ_t} soit positive. donc $\bar{C} \subseteq \Omega_+$, et par la proposition 4.1, $W \setminus O(\mathcal{B})$ est compact.

Donc, W est compact. —

Le lemme 4.6 sera utilisé dans la preuve de la classification des groupes hyperboliques.

Lemme 4.6 Si une matrice de Coxeter $B = (m_{s,t})_{s,t \in S}$ est irréductible et positive alors

$$\forall r \in S, (m_{s,t})_{s,t \in S \setminus \{r\}} \text{ est définie positive}$$

Démonstration. Soit $N = \{x \in V \mid \mathcal{B}(x, v) = 0 \forall v \in V\}$. Cet ensemble peut aussi être décrit par $N = \{x \in V \mid \mathcal{B}(x, x) = 0\}$. En effet, si $\mathcal{B}(x, v) = 0 \forall v \in V$ alors, en particulier $\mathcal{B}(x, x) = 0$. D'autre part, puisque B est positive, par le théorème 2.1, B peut être écrite de la forme suivante

$$B = P^T \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O_{n-r} \end{pmatrix} P$$

si $\mathcal{B}(x, x) = 0$, nous obtenons

$$x^T B x = 0 \Rightarrow x'^T \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O_{n-r} \end{pmatrix} x' = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^r x_i'^2 = 0$$

en posant $x' = Px$. Nous obtenons donc que les r premières entrées de x' sont nulles, et ainsi $x^T B v = 0 \forall v \in V$.

Soit $x \in N \cap \{y \in V \mid \langle e_r^*, y \rangle = 0\}$, posons $x = \sum_{s \neq r} a_s e_s$

Comme $\mathcal{B}(e_s, e_t) \leq 0 \forall s, t \in S, s \neq t$, nous avons

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{B}(x, x) &= \sum_{s \neq r} a_s^2 \mathcal{B}(e_s, e_s) + \sum_{s \neq r} a_s \sum_{t \neq r, s} a_t \mathcal{B}(e_s, e_t) \geq \sum_{s \neq r} a_s^2 \mathcal{B}(e_s, e_s) + \sum_{s \neq r} |a_s| \sum_{t \neq r, s} |a_t| \mathcal{B}(e_s, e_t) \\ &= \mathcal{B} \left(\sum_{s \neq r} |a_s| e_s, \sum_{s \neq r} |a_s| e_s \right) \geq 0 \end{aligned}$$

La dernière inégalité venant du fait que B est positive.

Notons $|x| = \sum_{s \neq r} |a_s| e_s$, alors $|x| \in N \cap \{y \in V \mid \langle e_r^*, y \rangle = 0\}$

Soit $T = \{t \in S \setminus \{r\} \mid a_t \neq 0\}$. $\forall s \in S \setminus T$, nous avons $\mathcal{B}(|x|, e_s) = \sum_{t \neq r} |a_t| \mathcal{B}(e_t, e_s) = 0$, car $|x| \in N$. Donc, $\mathcal{B}(e_t, e_s) = 0 \forall t \in T, s \in S \setminus T$.

S et T sont orthogonaux, or W est irréductible, nous avons alors soit $T = \emptyset$, soit $T = S$.

Comme $x \in \{y \in V \mid \langle e_r^*, y \rangle = 0\}$ nous avons $a_r = 0$. Ainsi, $r \in S \setminus T$, donc $T = \emptyset$. De cela, nous obtenons que $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$. D'où $(m_{s,t})_{s,t \in S \setminus \{r\}}$ est définie positive. \square

Le lemme 4.6 n'est vrai que lorsque W est irréductible. Pour l'illustrer, nous pouvons considérer le groupe affine $(p, q, r) = (2, 2, \infty)$. W est le groupe $A_1 \times I_\infty$, et nous obtenons le groupe affine I_∞ en ôtant s_1 .

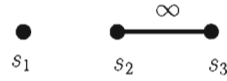
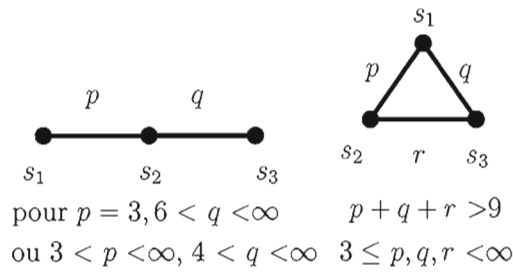


Figure 4.1 Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 2, \infty)$

Les deux théorèmes suivants établissent la classification des groupes hyperboliques compacts et non-compacts.

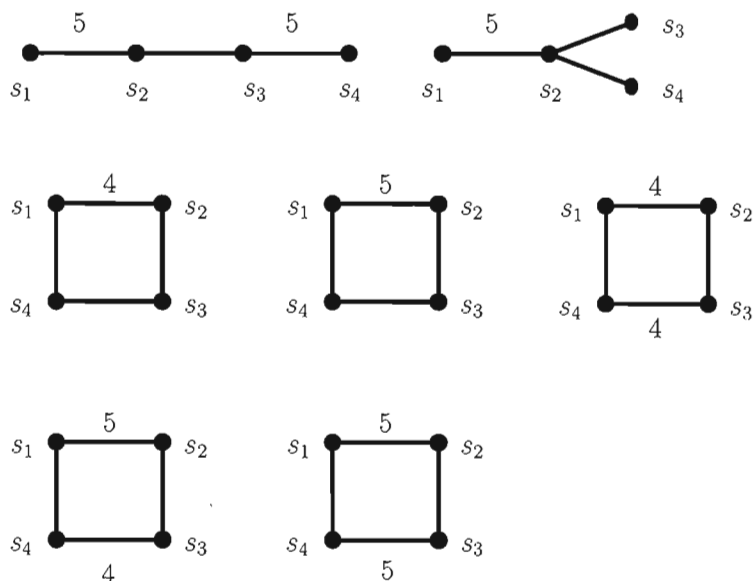
Théorème 4.3 *Voici la liste de tous les groupes de Coxeter hyperboliques irréductibles compacts.*

Rang 3

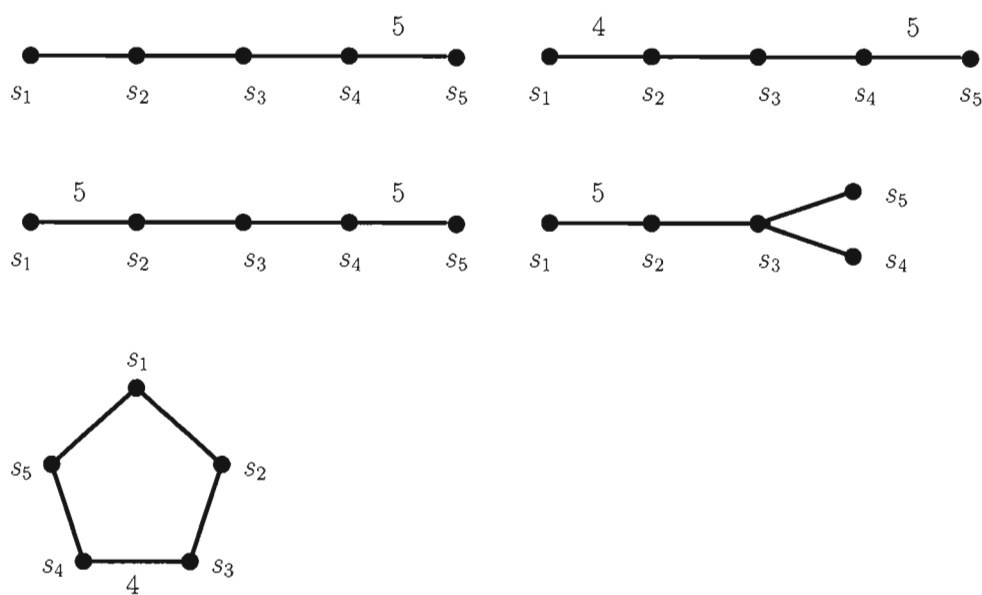


Rang 4





Rang 5



Il n'existe pas de notation standard pour ces groupes comme c'est le cas des groupes de Coxeter affines et finis. Nous notons les groupes compact de rang x : $Cx.1, Cx.2$, etc. dans l'ordre de lecture où ils apparaissent dans la liste ; les groupes non-compacts seront notés de façon similaire $NCx.1, NCx.2$, etc.

Démonstration. Nous nous servirons de la bijection entre les groupes et les graphes de Coxeter pour construire, rang par rang, la liste de tous les groupes de Coxeter hyperboliques compacts.

Rang 1 et 2

En consultant la liste de tous les graphes de groupes de Coxeter finis et affines, nous observons que toutes les possibilités de graphes de rang 1 et 2 sont présentes. Les groupes de Coxeter hyperboliques ont nécessairement un rang supérieur à 2.

Rang 3

Pour le rang 3, nous avons déjà fait le travail au chapitre 2. Nous avons prouvé que si $p \leq q \leq r$ sont les étiquettes des arêtes du graphe, alors le groupe est hyperbolique si et seulement si p, q, r sont tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$. De cette condition, nous obtenons que

◊ si $p = 2$ et $q = 3$, alors $r > 6$

◊ si $p = 2$ et $q > 3$, alors $r > 4$

◊ si $p > 2$, alors $p + q + r > 9$

Si $r = \infty$, alors $p, q > 2$ et nous avons un cycle. Cela signifie que si nous ôtons le sommet opposée à l'arête r , nous obtenons le graphe de I_∞ qui est un groupe affine. Ce groupe de Coxeter hyperbolique est donc non-compact. Pour l'exclure de la liste des groupes compacts, nous devons ajouter la condition $p, q, r < \infty$.

Nous avons obtenu ce que nous voulions pour les groupes compacts de rang 3. Pour les rangs suivants, nous nous servons du théorème 4.2. Il indique que chaque groupe de Coxeter (W, S) hyperbolique compact irréductible est tel que pour tout $s \in S$, le graphe de $(W, S \setminus \{s\})$ est celui d'un groupe fini, irréductible ou non, dans ce dernier cas son graphe possède deux composantes connexes puisque (W, S) est irréductible.

Pour construire la liste de tous les graphes de Coxeter de groupes irréductibles compacts, il faut d'abord considérer toutes les façons d'ajouter un sommet à chacun des graphes des groupes de Coxeter irréductibles finis, puis toutes les façons de l'ajouter à chaque paire de graphes de groupes finis. Ensuite, il faudra vérifier que le graphe obtenu est

bien celui d'un groupe de Coxeter hyperbolique.

Toutes ces vérifications à faire sont fastidieuses. Les remarques suivantes permettront de diminuer le nombre de cas à considérer.

Remarque 1

Relier deux groupes de Coxeter irréductibles finis ne donnera pas de nouvelle solution.

Cela vient du fait que les graphes de Coxeter finis sont des arbres. Un graphe simple est un arbre dès qu'il possède deux des trois caractéristiques suivantes (il possède alors la troisième) :

- connexe,
- sans cycle,
- $n - 1$ arêtes, n étant le nombre de sommets.

En réunissant deux arbres par un sommet et deux arêtes, nous obtenons encore un arbre, disons Γ , puisque le graphe est connexe et possède encore $n - 1$ arêtes. En ôtant une des feuilles de Γ , nous obtenons un groupe de Coxeter fini irréductible, si Γ était bel est bien un groupe de Coxeter hyperbolique. Dans ce cas là, Γ aurait pu être obtenu d'un seul groupe de Coxeter fini additionné d'un sommet.

S'il y a plus de deux arêtes ajoutées lors de l'union de deux arbres, le graphe obtenu n'est pas un arbre, puisqu'il a plus de $n - 1$ arêtes. Il contient nécessairement un cycle. Si le graphe possède une feuille, en l'ôtant nous obtenons un groupe de Coxeter fini irréductible. S'il ne possède pas de feuille, c'est un cycle et en ôtant un sommet nous obtenons une chaîne, c.-à-d. un graphe connexe.

Remarque 2

Supposons qu'un groupe de Coxeter hyperbolique contient un sous-graphe propre étant le graphe d'un groupe de Coxeter hyperbolique. Alors, il est possible d'obtenir le graphe en question en enlevant certains sommets, de telle sorte qu'après chaque sommet ôté, le graphe reste connexe.

Le groupe de Coxeter est hyperbolique compact et en ôtant un sommet, nous obtenons le graphe de groupe de Coxeter fini, irréductible. En ôtant un autre sommet, par le lemme 4.6, nous obtenons un groupe de Coxeter fini. À chaque étape, nous appliquons le lemme 4.6 et obtenons un groupe de Coxeter fini. Mais cela est en contradiction avec l'hypothèse de départ puisque nous avons supposé que le graphe résultant serait le graphe d'un groupe hyperbolique.

Il est donc impossible que le graphe d'un groupe de Coxeter hyperbolique contienne un sous-graphe propre étant le graphe d'un groupe de Coxeter hyperbolique.

Par le même raisonnement, nous pouvons déduire qu' *un groupe hyperbolique compact ne peut pas contenir un sous-graphe propre qui est le graphe d'un groupe affine.*

Ainsi, pour les groupes compacts de rang supérieur à 3, aucune arête ne sera étiquetée 6 ou plus, car \widetilde{G}_2 est affine. Deux étiquettes p, q d'arêtes adjacentes ne peuvent prendre des valeurs telles que $p > 3$ et $p > 4$ car deux arêtes adjacentes avec telles valeurs d'étiquettes constitue le graphe d'un groupe de Coxeter hyperbolique de rang 3. De la même façon, si une arête est étiquetée 4 ou 5, la ou les arêtes adjacentes seront nécessairement étiquetées 3.

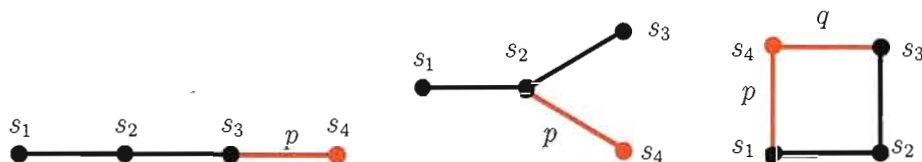
Remarque 3

Lorsque nous ajoutons un sommet à un groupe de Coxeter fini irréductible, nous avons soit une, soit deux arêtes supplémentaires ; deux si le graphe contient un cycle, une sinon. Il est impossible d'obtenir un groupe de Coxeter hyperbolique compact si trois arêtes sont ajoutées. En effet, aucun groupe de Coxeter fini ne contient de cycle et nous obtenons un cycle en ajoutant deux arêtes, par la remarque 1.

Rang 4

Dans la liste des groupes finis seuls A_3 , BC_3 et H_3 sont de rang 3.

En partant du graphe de A_3 , il y a trois façons de rajouter un sommet de manière à respecter les remarques précédentes.



Pour le premier cas,

- ◇ si $p = 3$, nous obtenons A_4
- ◇ si $p = 4$, nous obtenons BC_4
- ◇ si $p = 5$, nous obtenons H_4

Il n'y a pas de groupe hyperbolique de cette forme.

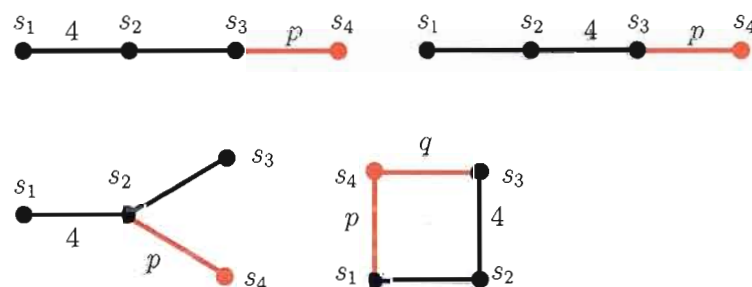
Pour le deuxième cas,

- ◇ si $p = 3$, nous obtenons D_4
- ◇ si $p = 4$, nous obtenons \widetilde{B}_3
- ◇ si $p = 5$, nous obtenons le graphe hyperbolique compact C4.4

Pour le troisième cas,

- ◇ si $p = 3$,
 - si $q = 3$, nous obtenons \widetilde{A}_3
 - si $q = 4$ ou $q = 5$, nous obtenons les groupes compacts C4.5 et C4.6
- ◇ si $p = 4$ ou $p = 5$, alors nécessairement $q = 3$, et nous obtenons la même chose que précédemment.

En partant de BC_3 , nous obtenons :



Pour le premier graphe,

- ◇ si $p = 3$, nous obtenons BC_4

◇ si $p = 4$, nous obtenons \widetilde{C}_3

◇ si $p = 5$, nous obtenons le groupe compact C4.2

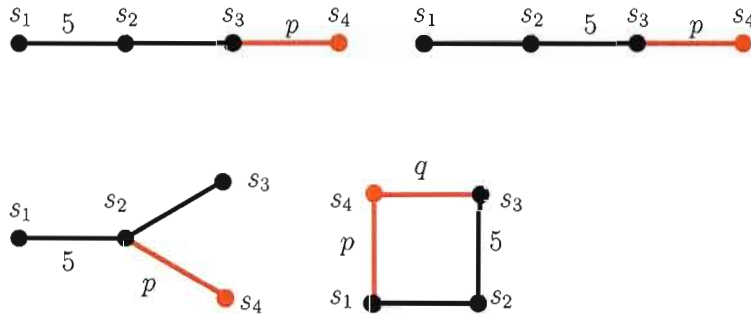
Pour le deuxième et le troisième graphes, p vaut nécessairement 3, et nous obtenons F_4 et \widetilde{B}_3 .

Pour le quatrième, q est égal à 3, et nous avons les cas suivants pour p :

◇ si $p = 3$, nous obtenons \widetilde{A}_2

◇ si $p = 4$, ou $p = 5$, nous obtenons les groupes compacts C4.7 et C4.8

En partant de H_3 , nous obtenons quatre graphes possibles :



Pour le premier graphe,

◇ si $p = 3$, nous obtenons H_4

◇ si $p = 4$, nous obtenons le graphe C4.2 déjà obtenu

◇ si $p = 5$, nous obtenons le groupe compact C4.3

Pour le deuxième et le troisième graphes, p vaut nécessairement 3, et nous obtenons deux groupes compacts dont un déjà obtenu. (C4.1 et C4.4)

Pour le quatrième graphe, q est égal à 3, et nous avons les cas suivants pour p :

◇ si $p = 3$ ou $p = 4$, nous obtenons les graphes C4.4 et C4.5 déjà obtenus

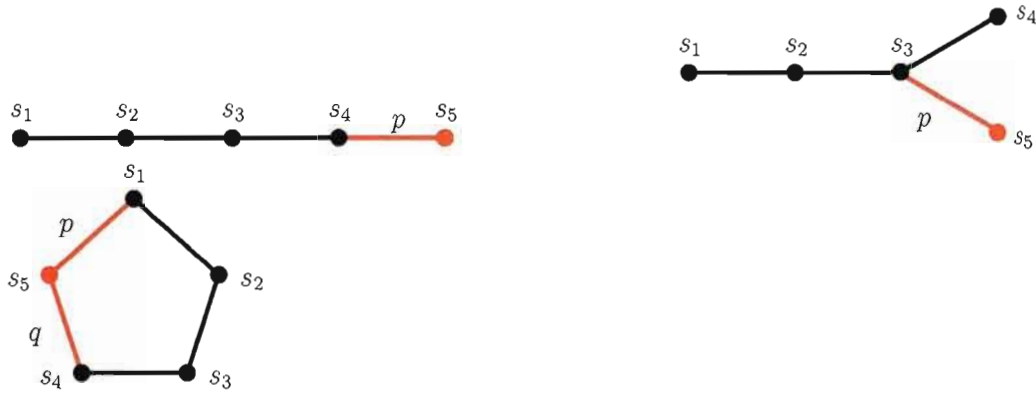
◇ si $p = 5$, nous obtenons le groupe compact C4.9

Nous avons obtenus tous les groupes compacts de rang 4.

Rang 5

Les groupes finis de rang 4 sont A_4, BC_4, D_4, F_4 et H_4 .

En partant de A_4 , nous obtenons



Dans le premier cas,

- ◊ si $p = 3$, nous obtenons A_5
- ◊ si $p = 4$, nous obtenons BC_5
- ◊ si $p = 5$, nous obtenons le groupe compact C5.1

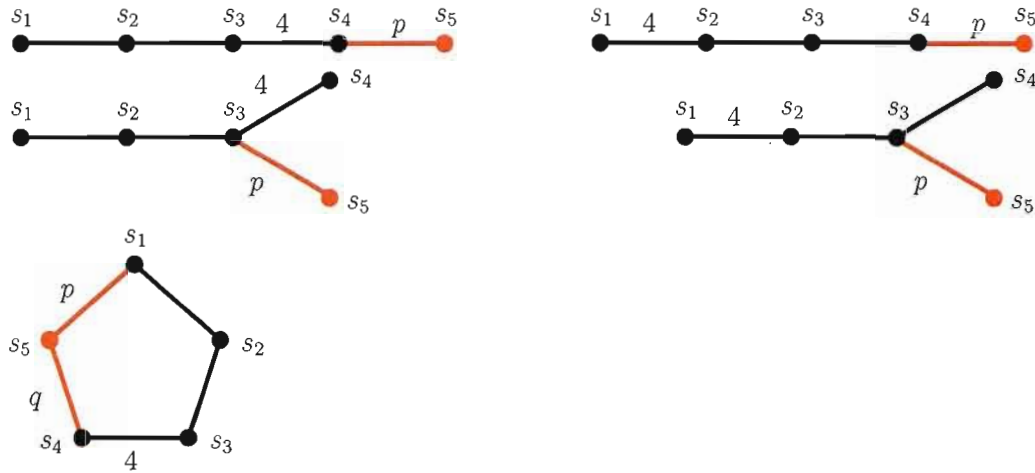
Dans le deuxième cas,

- ◊ si $p = 3$, nous obtenons D_5
- ◊ si $p = 4$, nous obtenons \widetilde{B}_3 en ôtant s_1 , le groupe est non-compact, c'est NC5.3
- ◊ si $p = 5$, nous obtenons C4.4 en ôtant s_1

Dans le troisième cas,

- ◊ si $p = 3$,
 - si $q = 3$, nous obtenons \widetilde{A}_4
 - si $q = 4$, nous obtenons C5.5
 - si $q = 5$, nous obtenons C4.1 en ôtant s_2
- ◊ si $p = 4$ ou $p = 5$, alors $q = 3$ et nous obtenons la même chose que précédemment

En partant de BC_4 , nous obtenons les cinq graphes possibles suivants :



Dans le premier cas, $p = 3$ et nous obtenons \widetilde{F}_4 .

Dans le deuxième cas,

◇ si $p = 3$, nous obtenons BC_5

◇ si $p = 4$, nous obtenons \widetilde{C}_4

◇ si $p = 5$, nous obtenons $C5.2$

Dans le troisième cas, $p = 3$ et nous obtenons encore $NC5.3$.

Dans le quatrième cas,

◇ si $p = 3$, nous obtenons \widetilde{B}_4

◇ si $p = 4$, nous obtenons le groupe non-compact $NC5.2$ car nous avons \widetilde{C}_3 en ôtant s_4

◇ si $p = 5$, nous obtenons $C4.2$ en ôtant s_4

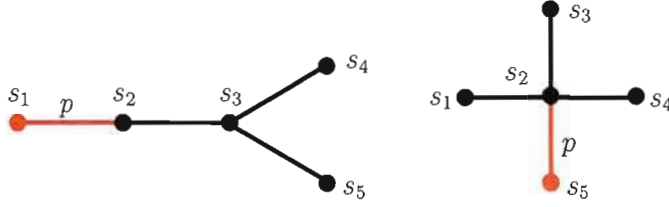
Dans le cinquième cas, $q = 3$.

◇ si $p = 3$, nous obtenons une fois de plus $C5.5$

◇ si $p = 4$, nous obtenons \widetilde{C}_3 en ôtant s_2 , c'est $NC5.9$

◇ si $p = 5$, nous obtenons $C4.2$ en ôtant s_2

En partant de D_4 , nous avons :



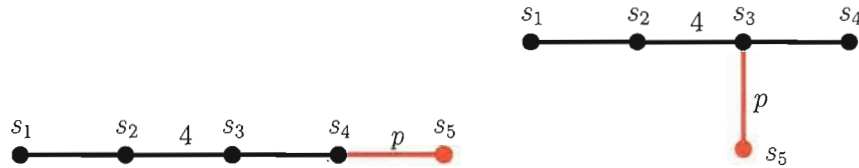
Dans le premier cas,

- ◊ si $p = 3$, nous obtenons D_5
- ◊ si $p = 4$, nous obtenons \widetilde{B}_4
- ◊ si $p = 5$, nous obtenons C5.4

Dans le second cas,

- ◊ si $p = 3$, nous obtenons \widetilde{D}_4
- ◊ si $p = 4$, nous obtenons \widetilde{B}_3 en ôtant s_1 , c'est NC5.7
- ◊ si $p = 5$, nous obtenons C4.4 en ôtant s_1

En partant de F_4 , nous avons



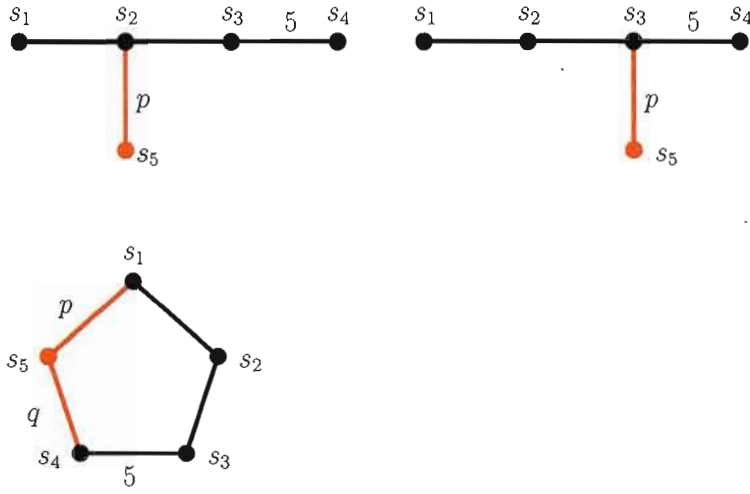
Dans le premier cas,

- ◊ si $p = 3$, nous obtenons \widetilde{F}_4
- ◊ si $p = 4$, nous obtenons \widetilde{C}_3 en ôtant s_1 , c'est NC5.1
- ◊ si $p = 5$, nous obtenons C4.4 en ôtant s_1

Dans le deuxième cas, alors $p = 3$, et nous obtenons \widetilde{B}_2 en ôtant s_1 , c'est NC5.4.

En partant de H_4 , nous obtenons les graphes suivants :





Dans le premier cas, $p = 3$ et nous obtenons C4.1 en ôtant s_1 .

Dans le deuxième cas,

- ◊ si $p = 3$, nous obtenons encore C5.1
- ◊ si $p = 4$, nous obtenons encore C5.2
- ◊ si $p = 5$, nous obtenons C5.3

Nous avons obtenu toute la liste des groupes compacts. Il reste à montrer qu'elle est exhaustive.

Dans le troisième cas,

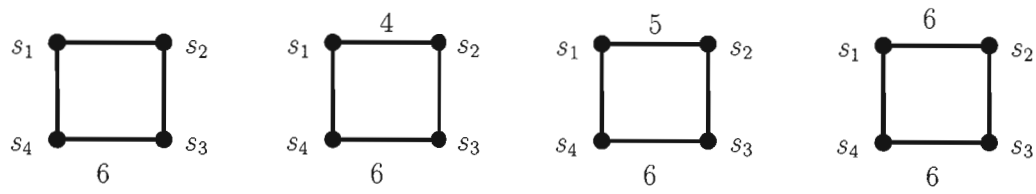
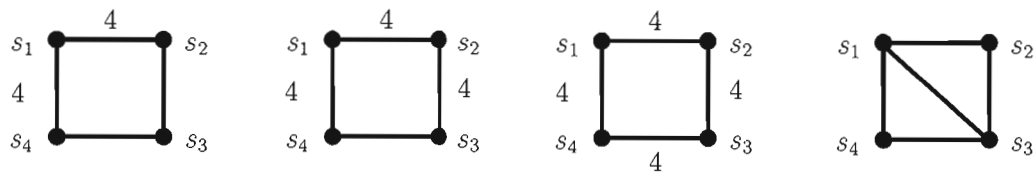
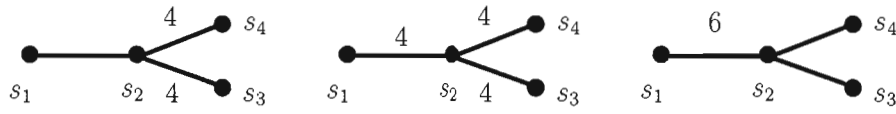
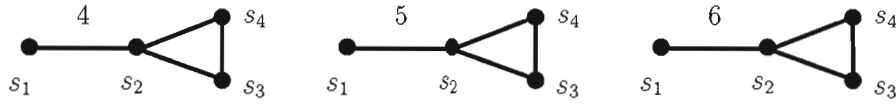
- ◊ si $p = 3$, nous obtenons encore C5.4
- ◊ si $p = 4$, nous obtenons C4.2 en ôtant s_1
- ◊ si $p = 5$, nous obtenons C4.3 en ôtant s_1

Dans le quatrième cas, $p = 3$ et nous obtenons C4.4 en ôtant s_1 .

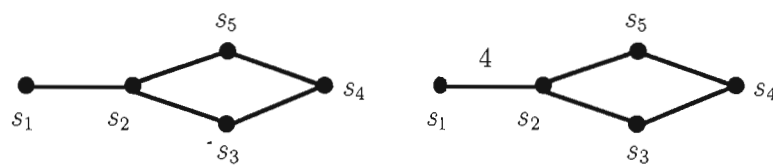
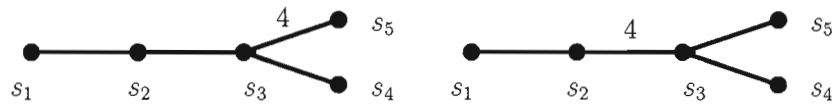
Dans le cinquième cas, $q = 3$.

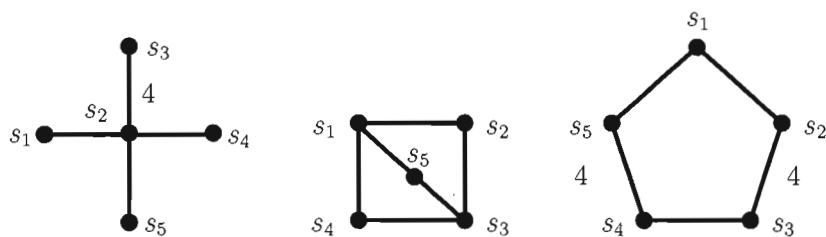
- ◊ si $p = 3$, nous obtenons C4.1 en ôtant s_1
- ◊ si $p = 4$, nous obtenons C4.2 en ôtant s_2
- ◊ si $p = 5$, nous obtenons C4.3 en ôtant s_2

Nous n'obtenons pas de nouvelles solutions. En ajoutant un sommet à chacun des graphes finis de rang supérieur à 4, nous obtenons toujours autre chose qu'un groupe de Coxeter

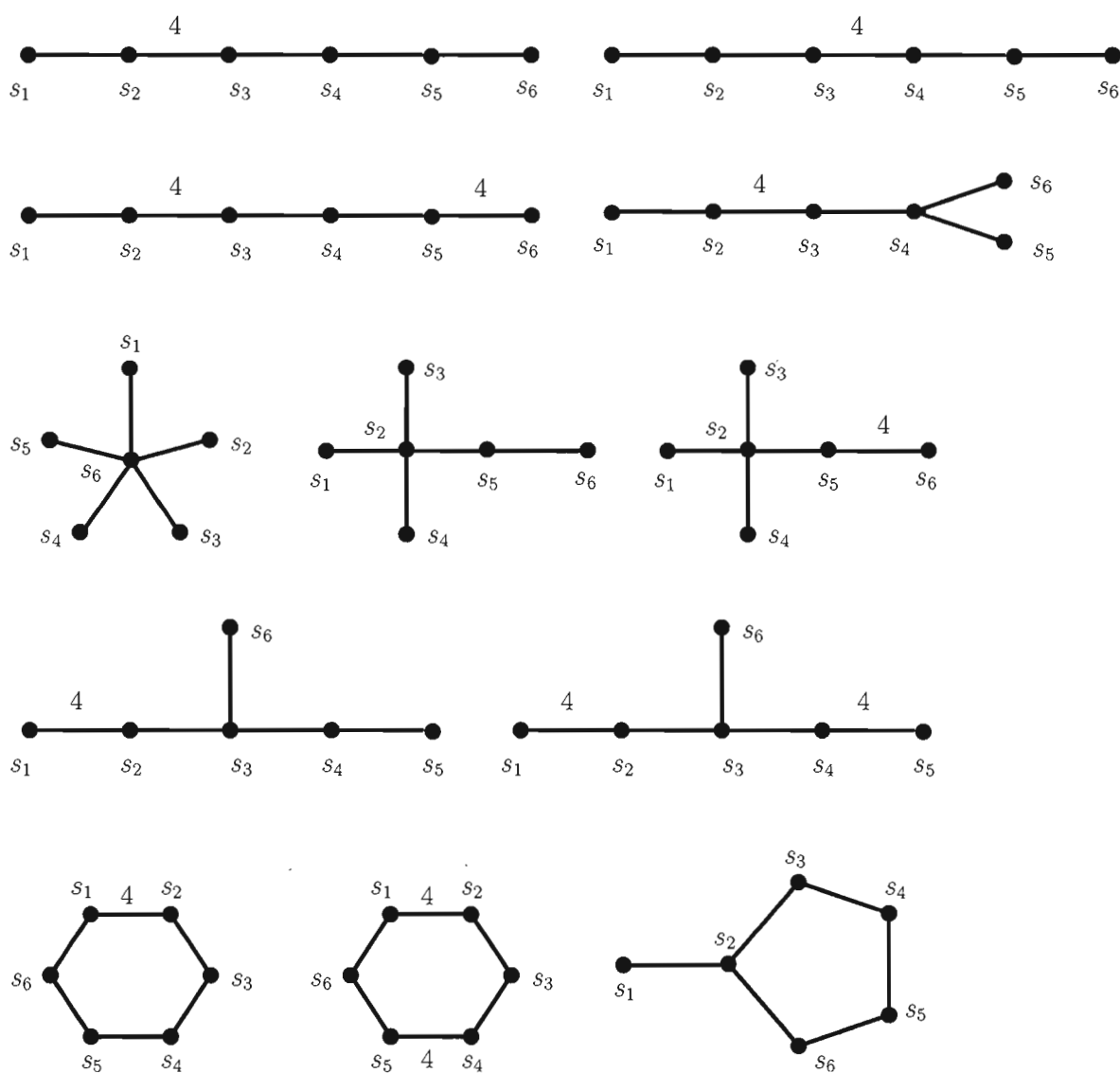


Rang 5

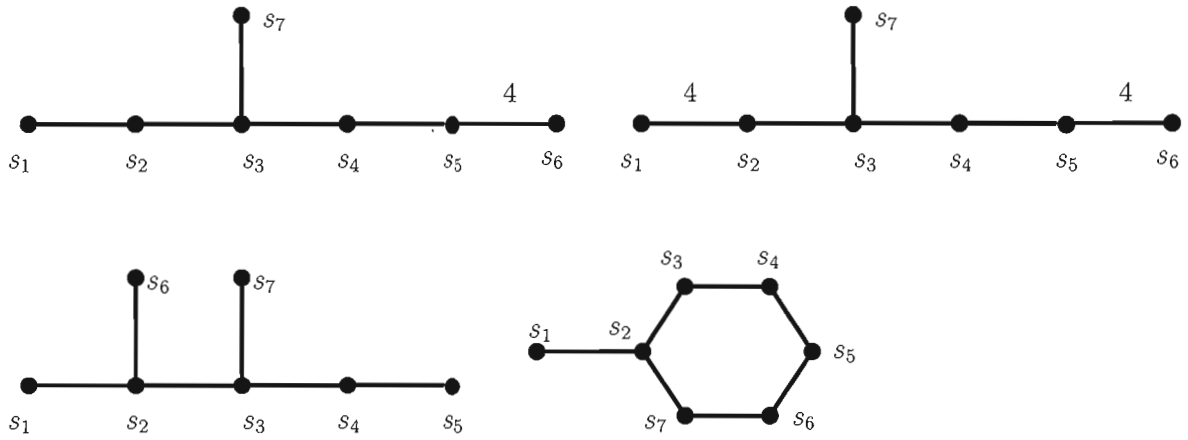




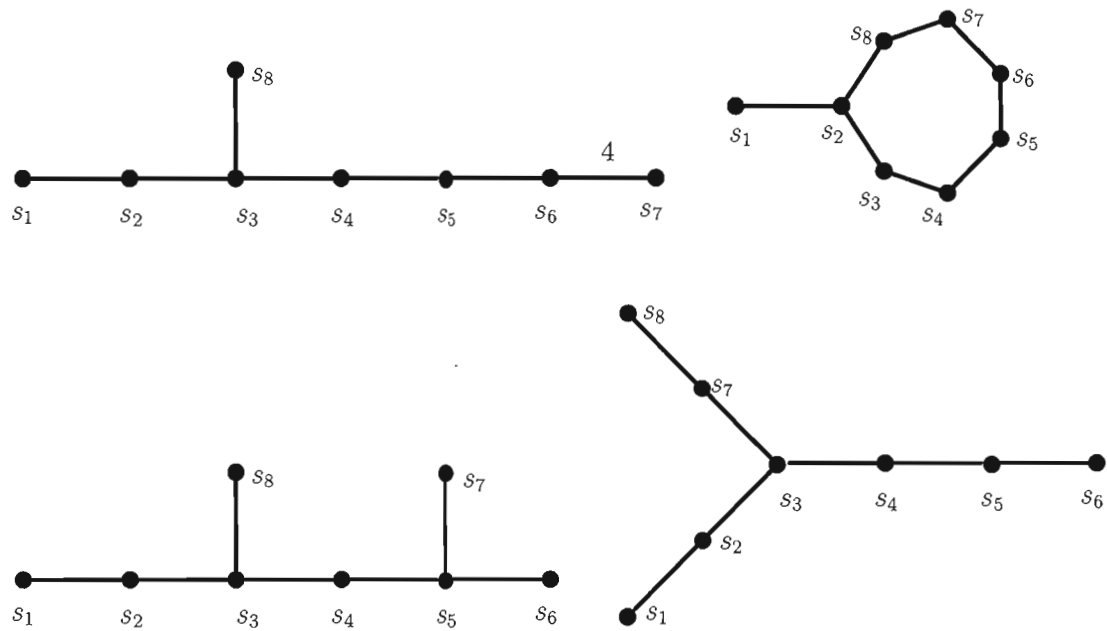
Rang 6



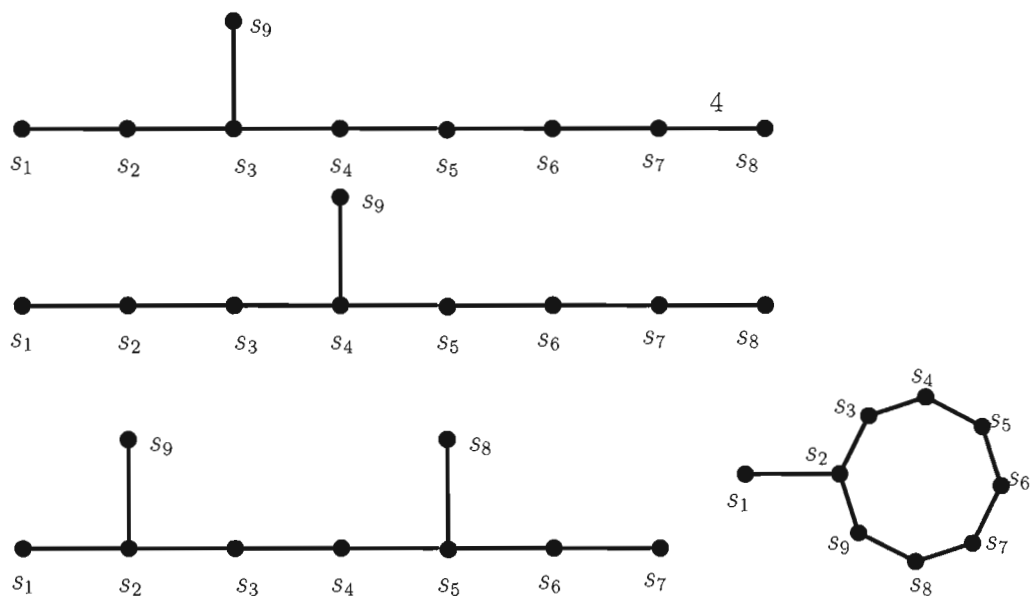
Rang 7



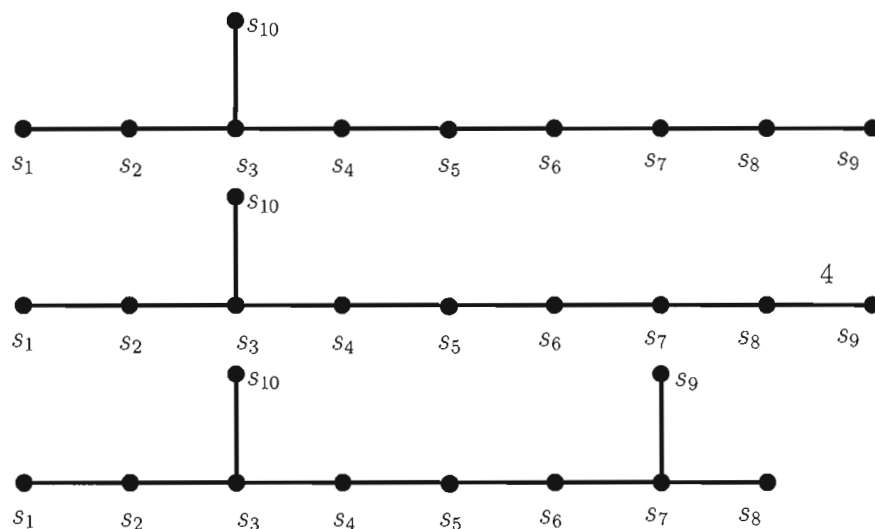
Rang 8



Rang 9



Rang 10



Démonstration. La preuve de ce théorème est semblable à celle du théorème précédent. Pour construire la liste de tous les groupes de Coxeter hyperboliques irréductibles non compacts, nous appliquons cette fois le théorème 4.1. Il faudra alors considérer les

graphes des groupes de Coxeter affines en plus de ceux des groupes de Coxeter finis.

La remarque 1 tient toujours : *relier deux groupes de Coxeter irréductibles finis ne donnera pas de nouvelle solution*. Les graphes des groupes de Coxeter affines sont presque tous des arbres, la seule exception est le cycle de \widetilde{A}_n . L'union d'un cycle et d'un arbre ne pose pas de problème, il existe une feuille telle que le graphe écimé de cette feuille reste connexe.

La remarque 2 devient : *le graphe d'un groupe de Coxeter hyperbolique ne peut contenir de sous-graphe propre qui est le graphe d'un groupe de Coxeter hyperbolique*.

Pour les groupes non-compacts de rang supérieur à 3, aucune arête ne sera étiquetée 7 ou plus ; et, si une arête est étiquetée 5 ou 6, la ou les arêtes adjacentes seront nécessairement étiquetées 3.

Lorsque nous ajoutons un sommet à un groupe de Coxeter fini irréductible, nous avons soit une, soit deux, soit trois arêtes supplémentaires. □

CONCLUSION

Le but principal du mémoire était de comprendre la représentation et la classification des groupes de Coxeter hyperboliques.

Pour atteindre cet objectif, nous avons développé les notions de domaine fondamental, de cône de Tits et de forme bilinéaire, puisqu'elles étaient essentielles à la représentation des groupes de Coxeter. Dans le cas de la représentation des groupes hyperboliques de rang 3, nous avons exposé les détails permettant de passer de la représentation avec les réflexions de \mathbb{R}^3 à celle des inversions dans le disque de Poincaré. La classification des groupes hyperboliques fût plutôt basée sur la compacité et sur la classifications des groupes finis et affines.

Nous avons comme objectif d'illustrer le plus de notions possibles et particulièrement de représenter un groupe de Coxeter hyperbolique grâce au langage informatique Sage. Nous avons choisi de tenter l'expérience avec le groupe de Coxeter où $(p, q, r) = (3, 3, 4)$. Nous avons réussi à créer l'illusion d'un disque de Poincaré. En fait, nous nous sommes arrêtés aux mots de longueur 20. Il serait intéressant de pouvoir refaire ces calculs pour d'autres groupes de Coxeter hyperboliques.

Une question s'est posée en cours de route. Celle de savoir s'il existe une série génératrice pour la longueur des mots dans les groupes de Coxeter hyperboliques, comme c'est le cas pour les groupes finis et affines. Sans avoir obtenu de réponse, nous savons simplement que l'inverseur de Plouffe n'a rien donné pour le cas du groupe $(3, 3, 4)$ que nous avons représenté. Il serait intéressant de se pencher sur la question.

LISTE DES FIGURES

1.1	Représentation de $s_1s_2s_1$ et $s_2s_1s_2$	4
1.2	Relation de tresse	5
1.3	Graphe de Coxeter de l'exemple 1.1	7
1.4	Graphe de Coxeter de l'exemple 1.4	7
1.5	Vecteurs générateurs de V	17
1.6	Chambre fondamentale et représentation de I_3	17
2.1	Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 2, 2)$	27
2.2	Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 2, x)$	27
2.3	Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 3, 3)$	28
2.4	Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 3, 4)$	28
2.5	Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 3, 5)$	28
2.6	Représentation de W avec $(p, q, r) = (3, 3, 3)$	30
2.7	Représentation de W avec $(p, q, r) = (2, 4, 4)$	31
2.8	Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 2, \infty)$	31
2.9	Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 3, 6)$	31
2.10	Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 4, 4)$	32
2.11	Graphe de W avec $(p, q, r) = (3, 3, 3)$	32

3.1	Hyperboloïde à deux nappes et C	36
3.2	Représentation de W avec $(p, q, r) = (3, 3, 4)$ sur le disque de Poincaré .	41
3.3	Inversion	43
3.4	Construction de l'inverse de C	44
4.1	Graphe de W avec $(p, q, r) = (2, 2, \infty)$	62

RÉFÉRENCES

- Bourbaki, N. 1981. *Groupes et algèbres de Lie, chapitre IV, V, VI*. Masson.
- Humphreys, J. E. 1990. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge studies in Adv. Mathematics 29.
- Joyal, P. 1982. « Groupes de coxeter et representations geometriques ». Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal.
- Koszul, J. L. 1967. « Lecture on hyperbolic coxeter groups », *NSF Research Contract*, p. 75.
- Sloane, N. J., The on-line encyclopedia of integer sequence.
[http ://www.research.att.com/ nja/sequences/](http://www.research.att.com/nja/sequences/).